

الطبعة الرابعة

سلسلة ملخصات

لشهر

نظريات ومسائل في

تحليل المنحنيات

ومقدمة لتحليل الكميات الممتدة

موراي ر. شبيجل

● يحتوي الكتاب على 480 مسألة محلولة حلاً تفصيلياً

الدار الدولية للنشر والتوزيع
القاهرة / مصر

سلسلة شهر
أكثر من 25 مليون نسخة
العالَم

0093187



ملخصات شوم
نظريات ومسائل
في
تحليل المتجهات
ومقدمة لتحليل الكميات الممتدة

تأليف
الدكتور موراى ز. شبيجل
أستاذ الرياضيات
معهد رنيل للفنون التطبيقية المتعلقة

ترجمة
الدكتورة سميرة عبد الحفيظ رستم
كلية التكنولوجيا
جامعة حلوان
جمهورية مصر العربية

مراجعة
الأستاذ الدكتور عبد الرزاق عبد الفتاح
رئيس جامعة حلوان
جمهورية مصر العربية



الدار الدولية للنشر والتوزيع

حقوق النشر

الطبعة الأجنبية : حقوق التأليف © ١٩٥٩ ، ١٩٧٤ دار ماكجروهيل للنشر . جميع الحقوق محفوظة .

Vector Analysis

Murray R. Spiegel

* الطبعة العربية الأولى : حقوق الطبع والنشر © ١٩٧٧ - جميع الحقوق محفوظة

* الطبعة العربية الثانية : حقوق الطبع والنشر © ١٩٩٥ ، جميع الحقوق محفوظة

* الطبعة العربية الثالثة : حقوق الطبع والنشر © ١٩٩٦ ، جميع الحقوق محفوظة

* الطبعة العربية الرابعة : حقوق الطبع والنشر © ١٩٩٨ ، جميع الحقوق محفوظة للنشر

الدار الدولية للنشر والتوزيع

٨ ش إبراهيم العرابي - النزهة الجديدة - القاهرة

ص.ب : ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب - القاهرة

تليفون : ٢٩٩٠٩٧٠

تلكس : PBSC UN ٢٠٨١٥

فاكس : ٢٩٩٠٩٧٠ / ٢٠٢٠٧

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى نحو أو به أى طريقة سرىء كائنات اليكترونية أو ميكانيكية أو خلاف ذلك إلا بإرفقة الناشر على هذا كتابة ومقماً

مقدمة الناشر

المعرفة هي أصل الحضارة ،
والكلمة هي أصل المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصنر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ، حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضارتها وإضاءة الطريق بنور العلم والمعرفة .
والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ، ثم توزيعها ، وذلك وحده هو الذي يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب تمتد الآفاق ، متسع الجنبات ، والملم لا وطن له ولا حدود ، ويوم يحظى القارئ العربي بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية هو اليوم الذي تتطلع له الأمة العربية جمعاء .
والدار الدولية للنشر والتوزيع تشعر بالرضا عن مساهمتها في هذا المجال بتقديم الطبعات العربية للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الاتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير إحتياجات القارئ العربي أستاذاً وباحثاً وممارساً .
ومن جانب آخر فنحن نمد يداً إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والمهيات الثقافية للتعاون معنا في إصدار طبعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية نخدم التقدم العلمي والحضاري للقارئ العربي :

والله ولي التوفيق ،،،

محمد وفائق كامل

مدير عام

الدار الدولية للنشر والتوزيع

مقدمة

تحليل المتجهات ، التي بدأت في منتصف القرن التاسع عشر ، أصبحت في السنوات الحديثة جزءاً أساسياً للجوانب الرياضية المطلوبة للمهندسين ، والمشتغلين بالعلوم والفيزياء والرياضيات . هذه الاحتياجات مبنية على أن تكون عارضة ، ليس فقط لما تمده تحليل المتجهات من العرض الرمزي المختصر للمعادلات الناتجة من الصياغة الرياضية للمشاكل الفيزيائية والهندسية ولكنها أيضاً مساعدة طيوية في تكوين الصور الفعنية للأفكار الفيزيائية والهندسية . باختصار قديكون حسناً جداً اعتبارها من أقدم القنات وطرق التفكير في العلوم الطبيعية لإنشاحاً .

صمم هذا الكتاب ليستعمل إما كمرجع لمنهج مقرر في تحليل المتجهات أو مكل مفيد جداً لكل المراجع الجارية القياسية . ويكون أيضاً ذا قيمة اعتبارية للذين يدرسون منهج في الفيزياء ، الميكانيكا ، نظرية الكهرومغناطيسية ، ديناميكا الهواء ، أو في أي من المجالات الأخرى المتشعبة التي تستخدم فيها طرق المتجهات .

يبدأ كل باب بعرض واضح لتعريفات المتصلة بالموضوع ، أساسيات ونظريات مؤسمة بأطلة ومواد وصف أخرى . ويتبع هذا مجموعة متدرجة من المسائل المتنوعة المحولة . المسائل المحولة تساعد على توضيح وإسباب في النظرية ، وتركز على النقاط الدقيقة جداً التي يندرجها لا يستطيع الطالب أن يشعر أن لديه خلفية متينة وتقدم التكرار للمبادئ الأساسية المحورية للتدريس الفعال . كما تحتوي المسائل المحولة الثباتات كثيرة للنظريات واشتقاق القوانين . والمعد الكثير للمسائل المتنوعة مع اجابتها تعطى مراجعة كاملة لمادة كل باب .

المواضيع التي دخلت تحتوى على الجبر والتفاضل وحساب التفاضل للمتجهات ، نظرية متوكمس ، نظرية التباعد ونظريات التفاضل الأخرى مدأ في تطبيقات لكل المجالات المختلفة . ملاح أخرى هي الأبواب على إحداثيات متحن الأشلاع وتحليل الكيات المستدة التي ثبتت فائدتها العظمى في الدراسات العليا الهندسية والفيزيائية والرياضية .

وقد احتوى الكتاب على مادة أكثر من تلك التي يمكن أن تنطبق المقررات الأولى . وذلك ليكون هذا الكتاب أكثر مرونة ويسهل مرجعاً أكثر لفائدة . ويكون حائزاً لمهندسين هذه المواضيع .

يتراف المؤلف بالمعروف والذين لديه هايدن لوضع وطبع الصور والعمل الفني لرسم الأشكال . واقعية هذه الأشكال أضافت كثير من التوضيح. الفعالي حيث تصور المجسات يلعب دوراً هاماً في الموضوع .

معد رئيسر للفنون التطبيقية

يونية ١٩٥٩

مقدمة الطبعة العربية

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة لم تكن بازدهارها أساساً الحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم والفكر . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحدياً بأن تطوع لعنيتها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سرية التطور والتجديد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذي تقلقت عنه زمناً طويلاً .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة في جامعاتنا العربية ما زالت في أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم . والصل على سد هذا النقص يهم إلى حد كبير في إمداد الأجيال التي نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وعيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استأجرت دار ماكجروهيل للنشر McGrawhill Book Company نشاطها بالفروع في إصدار الطبعة العربية من سلسلة مشوم Schumm Series التي تليق في طبيعتها الأصلية تجسداً لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكن وراء سلسلة ملخصات مشوم Schumm Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول ولغة خاصة بموضوع معين حدد تمهيداً جيداً ، مثل نظرية الاستقالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو النواثر الكهرومائية فيقدم عرضاً تمهيدياً للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب مشوم ككتاب مدرسية ، أو مذكرات فكلية معينة ، أو ككتاب للمطالعة بقصد التفوق والمراجعة ، أو باعتباره مراجع يحال إليها .

المحتويات

صفحة

الفصل الأول : المتجهات والمتجهات :	
المتجه . الكمية العددية . المتجهات الجبرية . قوانين المتجهات الجبرية . وحدة المتجه - وحدة المتجهات السودية . مركبات المتجه . المجال العددى . مجال المتجه ...	١ - ٢١

الفصل الثانى : ضرب الكيات المتجهة والكميات العددية :	
ضرب الكيات العددية . ضرب الكيات المتجهة . المتجهات المتجهيات الثلاثية . مجموعة المتجهات العددية ...	٢٢ - ٤٥

الفصل الثالث : تفاضل المتجه :	
المشتقات المادية للمتجهات . منحنيات الفراغ . الاستقرار والتفاضلية (القابلة للتفاضل) . صيغة التفاضل . التفاضل الجزئى للمتجهات . تفاضل المتجهات . التفاضليات المتتالية الميكانيكا ...	٤٦ - ٧٤

الفصل الرابع : الاتحدار والتباعد والاتفاف :	
العامل التفاضل لمتجه ديل Del . الاتحدار . التباعد . الاتفاف . التبع المتضمنة ∇ الثبات ...	٧٥ - ١٠٩

الفصل الخامس : تكامل المتجه :	
التكاملات المادية للمتجهات . التكاملات الخطية . تكاملات السطح . تكاملات الحجم ...	١٠٧ - ١٣٥

الفصل السادس : نظرية التباعد . نظرية ستوكس Stokes ونظريات التكامل المرتبطة :	
نظرية التباعد لجاريس . نظرية ستوكس . نظرية جرين في المستوى . نظريات التكامل المرتبطة . صيغة عامل التكامل ∇ ...	١٣٦ - ١٧٥

الفصل السابع : إحداثيات منحى الأصلاخ :	
تحول الإحداثيات . إحداثيات منحى الأصلاخ المتعامدة . وحدة المتجه في نظم منحى الأصلاخ طول القوس وعناصر الحجم . الاتحدار ، التباعد والاتفاف . نظم الإحداثيات الخاصة	

المتعامدة . الإحداثيات الاسطوانية . الإحداثيات الكروية . الإحداثيات الاسطوانية لقطع مكافئ . إحداثيات جسم قطع مكافئ . الإحداثيات الاسطوانية لقطع ناقص . إحداثيات شبه الكرة المتطاوول . إحداثيات شبه الكرة المخروطية . إحداثيات القطع للنقص . الإحداثيات ثنائية القطب ... ٢٠٩ - ١٧٦

الفصل الثامن : تحليل الكمية المستدة :

قوانين فيزيائية . الفراغات ذات الأبعاد التوتوية . تحولات الإحداثيات . اصطلاح التجميع . مصهات متضادة الاختلاف . ومضعة الاختلاف . الكميات المستدة المتضادة الاختلاف . المتحدة الاختلاف والمختلطة . الكروونكر دلتا . كميات مستدة من مرتبة أكبر من اثنين ، الكميات العددية أو الثوابت . مجالات الكمية المستدة . التماثل والتماثل المتخالف لكمة المستدة عمليات أساسية بالكميات المستدة . المصفوفات : جبر المصفوفات . عنصر الخط وكمية مستدة شربية . ثرائق (اقتران) أو تماكس (مغلوب) الكميات المستدة . كميات مستدة مترافقة (متشاركة) . طول المتجه . الزاوية بين المتجهات . المركبات الفيزيائية . رموز كريستوفيل قوانين التحول لرموز كريستوفيل . جيوديسيات (علم المساحة التطبيقية) . المشتقات المتحدة الاختلاف . رموز التبديل والكميات المستدة . صيغة كمية مستدة للانحدار والتباعد والانحناء . المشتقة الذاتية أو المثلقة . كميات مستدة مطلقة ونسبية ... ٢١٠ - ٢٧٠

قائمة المصطلحات : ٢٧١ - ٢٧٤

فهرس أبجدي : ٢٧٥ - ٢٨٥

المتجه الأول

المتجهات والمعدنيات

المتجه : هو كمية لها مقدار واتجاه مثل الإزاحة والسرعة والقوة والمجلة .

يمثل المتجه بيانياً بسهم OP (شكل ١ - ١) يحدد الاتجاه وطول هذا السهم يعين مقدار المتجه . نهاية ذيل السهم O تسمى نقطة البداية للمتجه أو نقطة الأصل ، ويسمى الرأس P بنقطة النهاية أو النهاية .



شكل ١ - ١

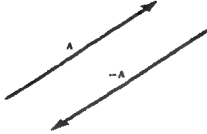
يمبر عن المتجه تنبيليا بحرف فوقه سهم مثل \vec{A} كما في شكل ١ - ١ ومقدار هذا المتجه يرمز له بالرمز $|\vec{A}|$ أو A في المخطوعات يستخدم البنت الظاهر مثل \vec{A} لتمثل المتجه \vec{A} في حين A أو $|\vec{A}|$ تمثل المقدار وسوف يستعمل في هذا الكتاب البنت الظاهر المتجه OP يمكن كتابته أيضا كالاتي \vec{OP} أو OP في هذه الحالة يحدد مقدار هذا المتجه بالرمز $|\vec{OP}|$ ، $|\vec{OP}|$ أو $|OP|$.

الكمية المعدنية : مركبة لها مقدار وليس لها اتجاه مثل الكتلة ، الطول ، الزمن ، درجة الحرارة ، أو أي عدد حقيقي ويمرر عادة لكيات المعدية بالحروف المعدية كما هو مستعمل في مباحث الجبر . العمليات الرياضية للكيات المعدية تتبع نفس قوانين مباحث الجبر .

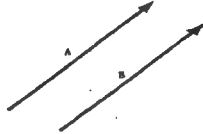
المتجهات الجبرية : عمليات الجبر وال طرح وال ضرب مألوفة في الأعداد الجبرية أو المعدية - بالتعريف المتلازمة ، وهذه التعاريف يمكن التوسع فيها لنقل المتجهات الجبرية . التعاريف الآتية أساسية :

١ - المتجهان A و B يتساويان إذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه بنفس النظر عن موضع نقطة البداية ، وبذلك يكون $A = B$ كما بشكل ١ - ٢ .

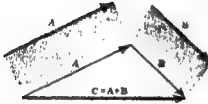
٢ - المتجه الذي له اتجاه عكس المتجه A وله نفس المقدار يرمز له بالرمز $-A$ كما بشكل ١ - ٣ .



شكل ١ - ٣



شكل ١ - ٢



شكل ١ - ٤

٢- مجموع أو محصلة متجهين A و B هي المتجه C المتكون

بوضع نقطة البداية للمتجه B على نقطة النهاية للمتجه A

ثم نوصل نقطة النهاية للمتجه A بنقطة النهاية للمتجه B

شكل ١ - ٤ وهذا المجموع يكتب كالتالي :

$$A + B \text{ أو } C = A + B$$

هذا التعريف يكافئ قانون متوازي الأضلاع لجميع المتجهات (أنظر المسألة رقم ٣).

استكثالا لجميع أكثر من متجهين ، اتبع نفس الطريقة (أنظر مسألة رقم ٤).

٤- الفرق بين المتجهين A ، B يرمز عنه بالرمز $A - B$ وهو عبارة عن المتجه C مضافا إليه المتجه B لينتج

المتجه A . والمتجه $A - B$ يكافئ جمع $A + (-B)$.

إذا كان $A = B$ حينئذ $A - B$ يساوي صفرا ويحذف بالمتجه الصفري ويرمز له بالرمز 0 أو 0 .

ببساطة ، أي أن مقداره يساوي صفرا وليس له اتجاه محدد - أما المتجه غير الصفري فهو متجه حقيقي . كل

المتجهات تعتبر متجهات حقيقية إلا إذا ذكر غير ذلك .

٥- ضرب المتجه A بكية عددية m هو متجه mA الذي قيمته $|m|$ مضروبا في مقدار A وله نفس الاتجاه مثل

المتجه A أو عكسه تما للقيمة m موجبة كانت أو سالبة . إذا كانت $m = 0$ يصبح المتجه mA متجهها صفريا .

قوانين المتجهات الجبرية : إذا كان كل من C و A و B متجهات وأن m ، n معديات فإن

$$A + B = B + A$$

١- قانون التبديل للجمع .

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

٢- قانون التوافق للجمع .

$$mA = Am$$

٣- قانون التبديل للضرب .

$$m(nA) = (mn)A$$

٤- قانون التوافق للضرب .

$$(m + n)A = mA + nA$$

٥- قانون توزيع الحدود .

$$m(A + B) = mA + mB$$

٦- قانون توزيع الحدود .

ومن الملاحظ أن في هذه القوانين استخدم فقط ضرب الكمية المتجه بكمية عديدة أو أكثر . في الفصل الثاني سوف يعرف ضرب المتجهات .

هذه القوانين تمكننا من معاملة المعادلات الاتجاهية بنفس الطريقة التي نعامل بها المعادلات الجبرية العادية على سبيل المثال إذا كان $A + B = C$ بالتالي فإن $A = C - B$.

وحدة المتجه \hat{A} هو المتجه ذو وحدة المقادير - فإذا كان A

عبارة عن متجه له مقدار $A \neq 0$ فإن

A/A هي وحدة المتجه الذي له نفس الاتجاه مثل \hat{A} .

أي متجه A يمكن تمثيله بوحدة المتجه \hat{A} في نفس اتجاه

مضروباً بمقدار المتجه A . بالرمز $A = A\hat{A}$.

وحدة الاتجاهات المبدئية : \hat{x} و \hat{y} و \hat{z} مجموعة من

وحدة الاتجاهات تلك التي

لها الإحداثيات الموجبة الثلاثة المتعامدة x, y, z والتي يرمز

لها بالرموز $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ على الترتيب شكل ٥-١ .

سوف نستعمل اتجاه عقرب الساعة إلا إذا ذكر عكس ذلك .

اشتق اسم هذه الطريقة من حقيقة أن دوران أسنان القلاووظ في

الاتجاه الأيمن خلال Ox إلى Oy سوف تقدم الإزاحة

في الاتجاه الموجب z كما في شكل ٥-١ .

وعموماً فإن ثلاثة اتجاهات A, B, C لها نقطة بداية

مشتركة وليس لها مستوى واحد أي أنهم لا يقعون على أي مستوى

نفس المستوى ، يقال أنهم يكوّنون النظام الأيمن إذا كان دوران

أسنان القلاووظ في الاتجاه الأيمن خلال زاوية أقل من ١٨٠°

من المتجه A إلى المتجه B يسبب تقدم الإزاحة في الاتجاه C

كما بشكل ٦-١ .

مركبات المتجه : أي متجه A في ثلاثة أبعاد يمكن أن

يبرعه بنقطة بداية عند نقطة الأصل O

لإحداثيات المتعامدة (شكل ٧-١) . ولكن (A_x, A_y, A_z)

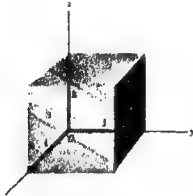
الإحداثيات المتعامدة لنقطة النهاية للمتجه A التي له نقطة البداية

عند O . للمتجهات A_x, A_y, A_z تسمى المركبات المبدئية

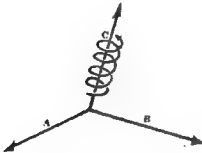
للمتجه أو ببساطة مركبات المتجهات A في الاتجاهات x, y, z

على الترتيب A_x, A_y, A_z تسمى المركبات المبدئية أو ببساطة

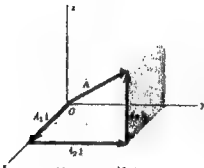
مركبات المتجه A في اتجاه x, y, z على الترتيب .



شكل ٥ - ١



شكل ٦ - ١



شكل ٧ - ١

مجموع أو محصلة A_1k, A_2k, A_3k ، هو المتجه A وحل ذلك يمكن أن نكتب

$$A = A_1i + A_2j + A_3k$$

مقدار المتجه A يكون

$$A = |A| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

حل وجه المحاور المتجه الموضعي أو المتجه نصف القطري r من نقطة O إلى نقطة (x, y, z) نكتب .

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$(٤) \quad r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{ولها المقدار}$$

المجال الممدي :

إذا تأملت كل نقطة (x, y, z) في منطقة فراغ R مقداراً أو كمية عددية $\phi(x, y, z)$ حيث ϕ تسمى الدالة العددية الموضعية أو دالة المنطقة العددية وبالتالي يمكن القول أن المجال الممدي ϕ قد عرف في المنطقة R .

أمثلة ١ : درجة الحرارة عند أي نقطة في أو على سطح الكرة الأرضية في وقت معين تعرف المجال الممدي أو غير المتجه

$$\phi(x, y, z) = x^2y - z^2 - r$$

المجال الممدي الذي لا يعتمد على الزمن يسمى المجال الممدي لحالة الإستقرار .

مجال المتجهة :

إذا تأملت كل نقطة (x, y, z) في منطقة فراغ R كمية متجهة $V(x, y, z)$ حيث V تسمى الدالة المتجهة الموضعية أو نقطة الدالة المتجهة - وبالتالي يمكن القول أنه يوجد مجال متجه V معرف في المنطقة R .

أمثلة ١ : إذا كانت السرعة عند أي نقطة (x, y, z) في مائع متحرك معروفة عند زمن معين حيث يكون مجال المتجه قد عرف .

$$V(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} - 2yz^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k} \quad \text{يعرف مجال المتجه}$$

مجال المتجه الذي لا يعتمد على الزمن يسمى مجال متجه مستمر .

مسائل محلولة

١ - أذكر أي من الكميات الآتية متجه وأي منها عددي :

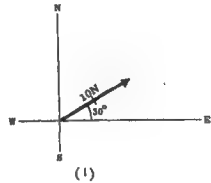
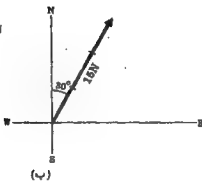
(١) الوزن	(ب) السرعة الحركية	(ج) الحرارة النوعية
(د) الزمن	(هـ) الكثافة	(و) الطاقة

(ل) الحجم	(م) المسافة	(ن) السرعة	(و) شدة المجال المغناطيسي
الحل : (أ) متجه	(ب) عددي	(ج) عددي	(د) متجه
(ل) عددي	(م) عددي	(ن) عددي	(و) عددي

٢ - مثل بيانيا : (أ) قوة مقدارها 10 N في اتجاه 30° شمال الشرق .

(ب) قوة مقدارها 15 N في اتجاه 30° شرق الشمال .

الوسيلة
= 5N



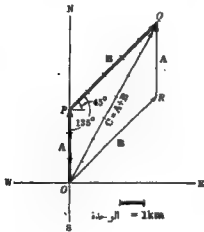
شكل ١ - أ

اختر مقدار الوحدة ، المتجهات المطلوبة كما هو مبين بشكل ١ - أ

٣ - تحرك سيارة 3 km في اتجاه الشمال ثم 5 km في اتجاه شمال الشرق مثل هذه الإزاحة بيانيا ثم أوجد محصلة الإزاحة :

(ب) حسابيا

(أ) بيانيا



شكل ١ - ب

المتجه OP أو A يمثل مسار 3 km في اتجاه الشمال

المتجه PQ أو B يمثل مسار 5 km في اتجاه شمال الشرق

المتجه OQ أو C يمثل محصلة الإزاحة أو محصلة المجموع

المتجهين B و A أي أن $C = A + B$ هذه هي قاعدة

المثلث لجميع المتجهات .

يمكن أيضا الحصول على محصلة المتجه OQ بتكوين قطر

متوازي الأضلاع OPQR شكل (١ - ب) الذي فيه المتجهات

OP = A و OR (يسمى المتجه PQ أو B) كجوانب .

هذه هي قاعدة متوازي الأضلاع لجميع المتجهات .

(١) إيجاد المحصلة بيناتيا . وقع 1 km عل المتجه OQ لإيجاد قيمة 7.4 km (تقريباً) الزاوية $\angle EOQ = 16.5^\circ$ باستخدام المنقطة . حيث المتجه OQ له القيمة 7.4 km واتجاه 61.5° شمال الشرق .

(ب) إيجاد قيمة المحصلة حسابياً . من المثلث OPQ حدد قيمة مقدار المتجهات A, B, C بواسطة A, B, C ، ولدنيا باستخدام قانون جيبوس التمام .

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \angle OPQ = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5) \cos 135^\circ = 34 + 15\sqrt{2} = 55.21$$

وتقريباً $C = 7.43$

$$\frac{A}{\sin \angle OQP} = \frac{C}{\sin \angle OPQ} \quad \text{بإستخدام قانون الجيوب}$$

حيث

$$\sin \angle OQP = \frac{A \sin \angle OPQ}{C} = \frac{3(0.707)}{7.43} = 0.2855 \quad , \quad \angle OQP = 16^\circ 35'$$

إذن المتجه OQ له القيمة 7.43 km والاتجاه $61^\circ 35' = (45^\circ + 16^\circ 35')$ شمال الشرق

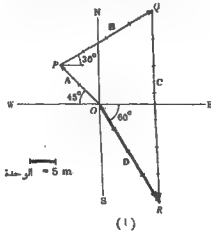
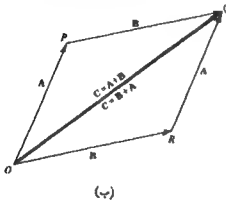
٤ - أوجد مجموع أو محصلة الازاحات الآتية :

المتجه A قيمته 10 m شمال الغرب ، المتجه B قيمته 20 m وإتجاهه 30° شمال الشرق - المتجه C قيمته 35 m جنوباً
شكل (١ - ١٠) .

عند نقطة نهاية المتجه A نضع نقطة البداية للمتجه B .

عند نقطة النهاية للمتجه B نضع نقطة البداية للمتجه C .

تتكون المحصلة D بوصول نقطة البداية للمتجه A بنقطة النهاية للمتجه C أي أن $D = A + B + C$
بيناتيا بالقياس فإن المحصلة تساوى 4.1 units تساوى 20.5 m ولها الاتجاه 60° جنوب الشرق .
لمعرفة الطريقة الحسابية نجعل ثلاثة متجهات أو أكثر سواء كانوا في مستوى واحد أو في الفراغ أنظر مسألة ٢٦ .



شكل ١ - ١٠

٥- بين أن مجموع المتجهات يخضع لقانون التبديل مثلا $A + B = B + A$ شكل (١-١٠ ب)

$$OP + PQ = OQ \text{ , } A + B = C$$

$$\text{, } OE + RQ = OQ \text{ , } B + A = C$$

$$A + B = B + A \text{ إذن}$$

٦- بين أن مجموع المتجهات يخضع لقانون التوافق مثلا $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$OP + PQ = OQ = (A + B)$$

$$PQ + QR = PR = (B + C)$$

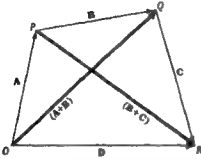
$$A + (B + C) = D \text{ أى أن } OP + PR = OR = D$$

$$(A + B) + C = D \text{ أى أن } OQ + QR = OR = D$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \text{ إذن}$$

استكثالا لتتائج المسائل ٥ - ٦ بين أن ترتيب الجمع

لاى عدد من المتجهات غير جوهري .



شكل ١ - ١١

٧- القوى F_1, F_2, \dots, F_n تؤثر كاهو من على الجسم P . ماهى القوة المطلوبة تنتج P من الحركة .

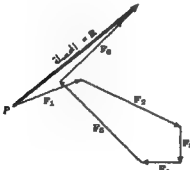
حيث أن ترتيب المتجهات فى عملية الجمع غير موضوعية إذن يمكن أن نبدأ بأى متجه وليكن F_1 . اجمع على F_2

المتجه F_2 ثم F_3 . . . الخ المتجه المرسوم من نقطة البداية للمتجه F_1 إلى نقطة النهاية للمتجه F_6 هو المتجه R

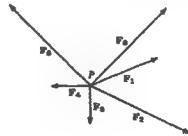
$$\text{أى أن } R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$$

القوة المطلوبة تنتج P من الحركة هو $-R$. هذا المتجه لهية متساوى للمتجه R ، ولكن مكنس الاتجاه وفى بعض

الأسياان يسمى الموازن .



(ب)



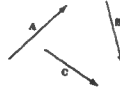
(١)

١- أعطيت المتجهات A, B, C شكل (١ - ١٢) كون :

$$A - B + 2C \quad (1) \quad 3C - \frac{1}{2}(2A - B) \quad (2)$$

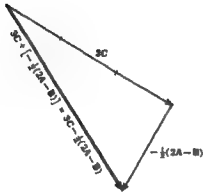


(ب)



(أ)

شكل ١ - ١٢

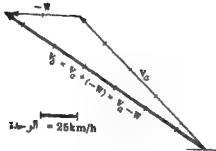


(ب)



(أ)

شكل ١ - ١٣



شكل ١ - ١٤

٩ - طائرة تتحرك في اتجاه الشمال الغرب بسرعة 125 km/h

بالنسبة للأرض نتيجة لوجود ربح غربية بسرعة

50 km/h بالنسبة للأرض أوجد السرعة والاتجاه

التي تتحرك بها الطائرة إذا لم توجه ربح مؤثرة ؟

ليكن W = سرعة الربح

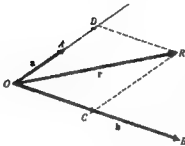
V_a = سرعة الطائرة في وجود الربح

V_b = سرعة الطائرة بدون ربح مؤثرة .

$$V_b = V_a - W = V_a + (-W) \quad \text{أو} \quad V_a = V_b + W$$

V_b لها مقدار 163 km/h و 6.5 units واتجاه 33° شمال الغرب .

١٠- - متطبي متجهين غير متوازيين . \vec{b} و \vec{a} أوجد تمثيل لأي متجه \vec{r} يقع في المستوى المحدد بالمتجهات \vec{a} و \vec{b} .



شكل ١ - ١٦

المتجهات غير المتوازية هي المتجهات التي لا تتوازي مع نفس الخط وبالتالي عندما تطبق نقطة البداية لها نجدان مستوى . ليكن المتجه \vec{r} هو أي متجه واقع في المستوى المحتوي على \vec{a} و \vec{b} وتكون نقطة البداية له تتطابق على نقطة البداية للمتجهين \vec{a} و \vec{b} عند النقطة O . من نقطة النهاية R للمتجه \vec{r} كون خطوطا توازي المتجهين \vec{a} و \vec{b} ونكل متوازي الأشكال $ODRC$ شكل ١ - ١٦ بإعداد خطوط التأثير لكل من المتجهين \vec{a} و \vec{b} إذا لزم الأمر من الشكل المتكون .

حيث x كمية عددية $\vec{OB} = x\vec{OA} = x\vec{a}$

حيث y كمية عددية $\vec{OC} = y\vec{OB} = y\vec{b}$

وباستخدام قانون متوازي الأشكال لجميع المتجهات

$$\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad \text{أو} \quad \vec{OR} = \vec{OB} + \vec{OC}$$

وهو التمثيل المطلوب . المتجهات \vec{a} و \vec{b} تسمى مكونات المتجه \vec{r} في اتجاه \vec{a} و \vec{b} على الترتيب . الكمية العددية x و y يمكن أن تكون موجبة أو سالبة ويتوقف ذلك على الاتجاه النسبي للمتجهات . من طريقة التكوين واضح أن x و y هما قيمة واحدة لكل من \vec{a} و \vec{b} . المتجهات \vec{a} و \vec{b} تسمى متجهات الأساس في المستوى .

١١- - متطبي ثلاثة متجهات \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} تقع في مستويات غير متوازية . أوجد تمثيل لأي متجه \vec{r} في الأبعاد الثلاثة .

حيث أن هذه المتجهات تقع في مستويات غير

متوازية وبالتالي عندما تطبق نقطة البداية فإن المتجهات

لا تقع في نفس المستوى .

ليكن \vec{r} أي متجه في الفراغ نقطة البداية له مطبقة

مع نقطة البداية لكل من المتجهات \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} . خلال

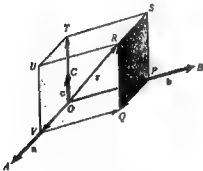
نقطة النهاية للمتجه \vec{r} مرر مستويات توازي على الترتيب

المستويات المحتوية على كل من المتجهات \vec{a} و \vec{c} ، \vec{a} و \vec{b} ، \vec{b} و \vec{c} ،

ثم كون متوازي السطوح $PQRSTU$ شكل ١ - ١٢

بإعداد خطوط التماس للمتجهات \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} إذا كان

ضروريا . من الشكل المجاور .



شكل ١ - ١٧

حيث x مقدار عددي $\vec{OV} = x\vec{OA} = x\vec{a}$

حيث y مقدار عددي $\vec{OP} = y\vec{OB} = y\vec{b}$

حيث z مقدار عددي $\vec{OT} = z\vec{OC} = z\vec{c}$

$$\text{ولكن } r = xa + yb + zc \text{ أو } OR = OV + VQ + QR = OV + OP + OT$$

من طريقة إنشاء الشكل يتضح أن x و y و z تكون وحدة (فردية) لكل من المتجهات المطلة

$$r \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } a$$

المتجهات $xa + yb + zc$ تسمى مركبات المتجه r في اتجاه a و b و c على الترتيب . المتجهات a و b و c تسمى المتجهات الأساسية في الثلاثة أبعاد .

كمثال خاصة إذا كانت المتجهات a و b و c هي وحدة المتجهات i و j و k والتي هي متعامدة على بعضها البعض يمكن أن نرى أن أي متجه r يمكن تمثيله بدلالة i و j و k بالتعبير $r = xi + yj + zk$.

أيضا إذا كانت $c = 0$ حينئذ فإن المتجه r لابد أن يقع في المستوى المحتوي على المتجهين b و a وبالتالي فإن نتيجة المسألة ١٠ يمكن الحصول عليها .

$$١٢ - أثبت أنه إذا كان المتجهان a و b غير متوازيين فإن $xa + yb = 0$ يتضمن $x = y = 0$.$$

افترض $x \neq 0$ إذن $xa + yb = 0$ يتضمن $xa = -yb$ أو $a = -(y/x)b$ أي أن a و b لابد أن يوازيها نفس الخط وهذا عكس الافتراض . إذن $x = 0$ وحينئذ $0 = yb$ ومنها يكون $y = 0$.

$$١٣ - إذا كان $\pi_1 a + \pi_2 b = \pi_3 a + \pi_4 b$ حيث a و b متجهين غير متوازيين ، إذن $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$.
أيضا $\pi_1 a + \pi_2 b = \pi_3 a + \pi_4 b$ يمكن أن تكتب$$

$$(\pi_1 - \pi_3)a + (\pi_2 - \pi_4)b = 0 \text{ أو } \pi_1 a + \pi_2 b - (\pi_3 a + \pi_4 b) = 0$$

$$\text{حينئذ من المسألة ١٢ } \pi_1 - \pi_3 = 0, \pi_2 - \pi_4 = 0 \text{ أو } \pi_1 = \pi_3, \pi_2 = \pi_4$$

$$١٤ - أثبت إذا كانت a و b و c غير متوازية فإن $xa + yb + zc = 0$ تتضمن $x = y = z = 0$.$$

افترض $x \neq 0$ حينئذ $xa + yb + zc = 0$ تتضمن $xa = -yb - zc$ أو $a = -(y/x)b - (z/x)c$ ولكن $-(y/x)b - (z/x)c$ متجه يقع على مستوى b و c (مسألة ١٠) أي a تقع في المستوى b و c وهذا واضح أنه عكس المطالبات أي أن a و b و c هي متجهات لا توازي نفس المستوى إذن $x = 0$ بنفس الأسباب يمكن إثبات التناقض بفرض أن $y \neq 0$ و $z \neq 0$

$$١٥ - إذا كان $\pi_1 a + \pi_2 b + \pi_3 c = \pi_4 a + \pi_5 b + \pi_6 c$ حيث a و b و c غير واقعة في نفس المستوى إذن$$

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$$

$$\text{يمكن أن تكتب المعادلة } (\pi_1 - \pi_4)a + (\pi_2 - \pi_5)b + (\pi_3 - \pi_6)c = 0$$

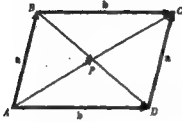
$$\text{حينئذ من المسألة (١٤) } \pi_1 - \pi_4 = 0, \pi_2 - \pi_5 = 0, \pi_3 - \pi_6 = 0 \text{ أو } \pi_1 = \pi_4, \pi_2 = \pi_5, \pi_3 = \pi_6$$

١٦ - برهن أن أضلاع متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

ليكن $ABCD$ هو متوازي أضلاع وليكن نقطة تقاطع

الأضلاع هي P

حيث أن



بما أن $BD + a = b$, $BD = b - a$. إذن $BP = x(b - a)$

بما أن $AC = a + b$, $AP = y(a + b)$.

لكن $AB = AP + PB = AP - BP$.

أي أن $a = y(a + b) - x(b - a) = (x + y)a + (y - x)b$

حيث b و a غير متوازية لدينا من المسألة ١٣

$$x + y = 1 \quad \text{و} \quad y - x = 0, \text{ لـ} a. \quad x = y = \frac{1}{2}$$

و P نقطة منتصف كلا القطرين

شكل ١٨ -

١٧ - إذا وصلت نقطة منتصف الأضلاع المتجاورة لأي شكل رباعي بتطوط مستقيمة فأنه أن الشكل الرباعي الناتج هو

متوازي أضلاع .

ليكن الشكل الرباعي المعطى $ABCD$ ونقط منتصف الأضلاع هي P, Q, R, S أنظر شكل (١٨ - ١) .

$$\text{حيثما} \quad PQ = \frac{1}{2}(a + b), \quad QR = \frac{1}{2}(b + c), \quad RS = \frac{1}{2}(c + d), \quad SP = \frac{1}{2}(d + a)$$

لكن $a + b + c + d = 0$ حيثما

$$QR = \frac{1}{2}(b + c) = -\frac{1}{2}(d + a) = -SP \quad \text{و} \quad PQ = \frac{1}{2}(a + b) = -\frac{1}{2}(c + d) = -SR$$

وعمل ذلك تكون الجوانب المتقابلة متساوية ومتوازية ويكون $PQRS$ متوازي أضلاع .

١٨ - إذا كانت P_1, P_2, P_3 هي نقطة ثابتة بالنسبة إلى نقطة الأصل O ولكن v_1, v_2, v_3 هي المتجهات الموضعية من

O إلى كل نقطة أثبت أنه إذا كانت المعادلة المتجه صحيحة بالنسبة إلى نقطة الأصل O فإنها تكون أيضا صحيحة

بالنسبة لأي نقطة أصل أخرى ولكن O' إذا وأذا فقط كان $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

ليكن v'_1, v'_2, v'_3 هي المتجهات الموضعية للنقط P_1, P_2, P_3 بالنسبة إلى O' وأيضاً بفرض أن v هو

المتجه الموضعي من O' بالنسبة إلى O ليثبت عن القروط التي متعها تكون المعادلة $a_1v'_1 + a_2v'_2 + a_3v'_3 = 0$

صحيحة للرجع الجديد المنسوبة

من شكل (ب) (١٨ - ١) واضح أن $r_1 = v + v'_1, r_2 = v + v'_2, r_3 = v + v'_3$ لذلك $a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 = 0$

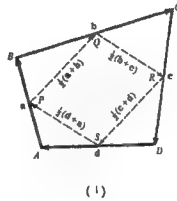
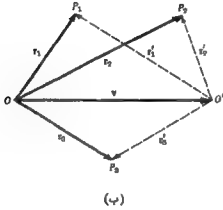
نصبح

$$\begin{aligned} a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 &= a_1(v + v'_1) + a_2(v + v'_2) + a_3(v + v'_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)v + a_1v'_1 + a_2v'_2 + a_3v'_3 = 0 \end{aligned}$$

النتيجة . تكون صحيحة فقط إذا $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \text{ أى أن } (a_1 + a_2 + a_3)v = 0$$

يمكن تمثيل هذه النتيجة



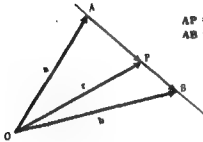
شكل ١ - ١٩

١٩ - أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطتين معلومتين A و B وله متجهان دوليمان a و b بالنسبة لنقطة الأصل O .

إذا فرضنا أن r هو المتجه الموضعي لأى نقطة P

على الخط المار بكل من A و B

من شكل ١ - ٢٠



شكل ١ - ٢٠

$$\begin{aligned} AP = r - a \text{ أى أن } a + AP = r \text{ أو } OA + AP = OP \\ AB = b - a \text{ أى أن } a + AB = b \text{ أو } OA + AB = OB \end{aligned}$$

حيث AP و AB على مستقيم واحد

$$\text{حيثما المعادلة } AP = tAB \text{ أو } r - a = t(b - a)$$

المطلوبة هى

$$r = (1-t)a + tb \text{ أو } r = a + t(b-a)$$

إذا كتبت المعادلة على الصورة $(1-t)a + t(b-a) = 0$ فيكون مجموع المعاملات لمتجهات a , b , r

هو $1-t+t-1=0$ ومن مسألة ١٨ يظهر أن النقطة P تكون دائماً على الخط القواصل بين A و B

ولا يعتمد على اختيار الأصل O وهذا هو المتوقع

طريقة أخرى . بما أن AP و PB يقعان على خط مستقيم واحد وأن n و m كيات عددية

$$m(r-a) = n(b-r) \quad \text{أو} \quad mAP = nPB$$

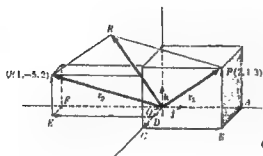
وبالمثل نجد $r = \frac{ma + nb}{m + n}$ والتي تسمى الصورة المائّلة

٢٠- (١) أوجد الاتجاهات الموضمية r_1 و r_2

نقط $P(2, 4, 3)$ و $Q(1, -5, 2)$ للاحداثيات

المتبادلة بدلالة وحدة الاتجاهات i, j, k إلى

(ب) عين بالرسم وبالتحليل محصلة هذين الاتجاهات الموضمية .



شكل ١- ٢١

(١)

$$r_1 = OP = OC + CB + BP = 2i + 4j + 3k$$

$$r_2 = OQ = OD + DE + EQ = i - 5j + 2k$$

(ب) بالرسم . محصلة r_1 و r_2 هي القطر OR

لتوازي المستويات $OPRQ$ تعطينا محصلة r_1, r_2

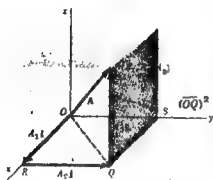
يمكن الحصول عليها .

$$r_1 + r_2 = (2i + 4j + 3k) + (i - 5j + 2k) = 3i - j + 5k$$

٢١- برهن أن مقدار A المتجه

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad \text{يكون} \quad A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

من نظرية فيثاغورث



شكل ١- ٢٢

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OO})^2 + (\overline{QP})^2$$

حيث \overline{OP} تبين مقدار المتجه OP وهكذا بالمثل $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2 \quad \text{إذن أو}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad \text{أي أن} \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

٢٢- أعطيت $r_1 = 3i - 2j + k$, $r_2 = 2i - 4j - 3k$, $r_3 = -i + 2j + 2k$ أوجد مقادير الكيات

$$2r_1 - 3r_2 - 5r_3 \quad (\text{ج}) \quad r_1 + r_2 + r_3 \quad (\text{ب}) \quad r_3 - i$$

$$|r_3| = |-i + 2j + 2k| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = (3i - 2j + k) + (2i - 4j - 3k) + (-i + 2j + 2k) = 4i - 4j + 0k = 4i - 4j$$

$$\text{إذن} \quad |r_1 + r_2 + r_3| = |4i - 4j + 0k| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 2(3i - 2j + k) - 3(2i - 4j - 3k) - 5(-i + 2j + 2k) \\ &= 6i - 4j + 2k - 6i + 12j + 9k + 5i - 10j - 10k = 5i - 2j + k. \end{aligned}$$

إذن $|2x_1 - 3x_2 - 5x_3| = |5i - 2j + k| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}.$

٧٣- إذا كان $x_1 = 2i - j + k$, $x_2 = i + 3j - 2k$, $x_3 = -2i + j - 3k$ و $x_4 = 3i + 2j + 5k$ أوجد المتجه الممثلة a, b, c حيث $x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3$

إذا اعتبرنا

$$\begin{aligned} 3i + 2j + 5k &= a(2i - j + k) + b(i + 3j - 2k) + c(-2i + j - 3k) \\ &= (2a + b - 2c)i + (-a + 3b + c)j + (a - 2b - 3c)k. \end{aligned}$$

حيث أن i, j, k ليست في مستوى واحد ومن مسافة ١

$$2a + b - 2c = 3, \quad -a + 3b + c = 2, \quad a - 2b - 3c = 5$$

بالحل $a = -2, b = 1, c = -3$ و $x_4 = -2x_1 + x_2 - 3x_3$

المتجه x_4 يكون له علاقة خطية معتمدا على x_1, x_2, x_3 وبعبارة أخرى x_1, x_2, x_3 تكون مجموعة متجهات ذات علاقات خطية. وبمعنى آخر أن ثلاثة (أو أقل) من هذه المتجهات تكون لها علاقة خطية مستقلة.

ويوجد عام المتجهات A, B, C, \dots سميت ذات علاقات خطية إذا أمكننا إيجاد مجموعة من الأعداد a, b, c, \dots ليست كلها أصفارا بحيث $aA + bB + cC + \dots = 0$ ولا تكون لها علاقة خطية غير مستقلة.

٧٤- أوجد وحدة المتجه الموازي لمجموعة المتجهات. $x_1 = 2i + 4j - 5k, x_2 = i + 2j + 3k$

المحصلة $R = x_1 + x_2 = (2i + 4j - 5k) + (i + 2j + 3k) = 3i + 6j - 2k$

$$R = |R| = |3i + 6j - 2k| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = 7.$$

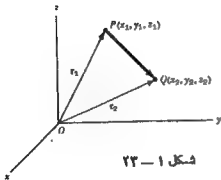
إذن وحدة المتجه الموازي للمجموعة R هي $\frac{R}{|R|} = \frac{3i + 6j - 2k}{7} = \frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j - \frac{2}{7}k$

حقن $|\frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j - \frac{2}{7}k| = \sqrt{(\frac{3}{7})^2 + (\frac{6}{7})^2 + (-\frac{2}{7})^2} = 1$

٥- بين المتجه الذي يماثل النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ ونماثلته النقطة $Q(x_2, y_2, z_2)$ وأوجد مقلوبه.

المتجه الممثلة النقطة P هو $r_1 = x_1i + y_1j + z_1k$
المتجه الممثلة النقطة Q هو $r_2 = x_2i + y_2j + z_2k$

أو $r_1 + PQ = r_2$
 $PQ = r_2 - r_1 = (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k)$
 $= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$



شكل ١- ٧٣

المقدار المتجه هو

$$PQ = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

لاحظ أن هذا هو المسافة بين النقطتين P و Q

٢٦ - القوى A, B, C تؤثر على جسم أعطت بدلاتهم مركباتهم بالمادة المتجه

$$A = A_1i + A_2j + A_3k, \quad B = B_1i + B_2j + B_3k, \quad C = C_1i + C_2j + C_3k$$

أوجد مقدار محصلة هذه القوى :

$$R = A + B + C = (A_1 + B_1 + C_1)i + (A_2 + B_2 + C_2)j + (A_3 + B_3 + C_3)k$$

محصلة القوى

$$= \sqrt{(A_1 + B_1 + C_1)^2 + (A_2 + B_2 + C_2)^2 + (A_3 + B_3 + C_3)^2}$$

مقدار المحصلة

هذه النتيجة يمكن تسميتها على أكثر من ثلاث قوى

٢٧ - بين الزوايا α, β, γ التي يصنعها المتجه

$$r = x i + y j + z k$$

مع الاتجاهات الموجبة للإحداثيات المبردة وأثبت أن

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

من الشكل ٢٤ - ١ المثلث OAP مثلث قائم

الزاوية عند A : إذن $\cos \alpha = \frac{x}{|r|}$ بالمثل من

المثلثين القائمين الزاوية OCP و OBP : إذن $\cos \beta = \frac{y}{|r|}$

$$|r| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{أيضاً} \quad \cos \gamma = \frac{z}{|r|}$$

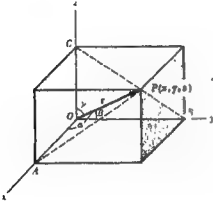
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r} \quad \text{إذن}$$

والتي يمكن الحصول على α, β, γ ومنها بالتالي فإن

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = 1$$

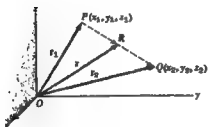
الأعداد جتا α و جتا β و جتا γ تسمى اتجاهات جيوب الزوايا المتجه OP .

٢٨ - بين مجموعة معادلات الخط المستقيم التي يمر بالنقطتين $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$.



شكل ١ - ٢٤

إذا فرضنا أن r_1 و r_2 هي الاتجاهات الموضعية
لنقطتين P و Q على الترتيب r هي الاتجاه الموضعي
لأي نقطة R على الخط الواصل بين P و Q .



شكل ١ - ٢٥

$$\begin{aligned} r_1 + PR &= r \quad \text{أو} \quad PR = r - r_1 \\ r_2 + PQ &= r \quad \text{أو} \quad PQ = r - r_2 \end{aligned}$$

لكن $PR = PQ$ حيث l مقدار عددي . حيث
 $r - r_1 = r - r_2 \Rightarrow r_2 - r_1$
المستقيم (قانون مسألة ١٩) .

بالإحداثيات الموضعية يكون

$$\begin{aligned} r &= x_1 i + y_1 j + z_1 k \\ (x_1 i + y_1 j + z_1 k) - (x_2 i + y_2 j + z_2 k) &= l [(x_2 i + y_2 j + z_2 k) - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)] \\ (x - x_1) i + (y - y_1) j + (z - z_1) k &= l [(x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j + (z_2 - z_1) k] \end{aligned}$$

حيث أن i, j, k اتجاهات في غير مستوى واحد ، فن مسألة ١٥

$$x - x_1 = l(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = l(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = l(z_2 - z_1)$$

كأن المعادلات البارامترية لمخطط المستقيم l هي البارامتر (المتغير) يحذف l تصبح المعادلات

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

٢٩- أعطيت المجال المزدني المرفب - $\varphi(x, y, z) = 3x^2z - xy^2 + 5$.

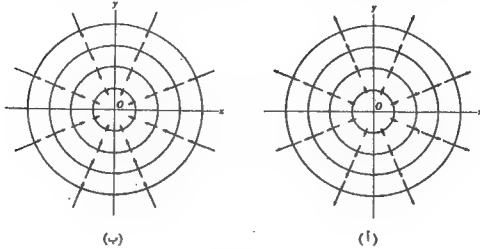
أوجد ϕ عند النقط

$$\begin{aligned} (1) \quad (0, 0, 0) \quad (ب) \quad (1, -2, 2) \quad (ج) \quad (-1, -2, -3) \\ \phi(0, 0, 0) &= 3(0)^2(0) - (0)(0)^2 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5 \quad - ا \\ \phi(1, -2, 2) &= 3(1)^2(2) - (1)(-2)^2 + 5 = 6 + 8 + 5 = 19 \quad - ب \\ \phi(-1, -2, -3) &= 3(-1)^2(-3) - (-1)(-2)^2 + 5 = -9 - 8 + 5 = -12 \quad - ج \end{aligned}$$

٣٠- أوسم المجال الاتجاه المرفب -

$$V(x, y, z) = xi + yj + zk, \quad V(x, y) = -xi - yj, \quad V(x, y) = xi + yj$$

(١) عند أي نقطة (x, y) ما عند النقطة $(0, 0)$ من المستوى xy يوجد متجه وحيد $xi + yj$ بمقداره $\sqrt{x^2 + y^2}$
واتجاهه يمر بالأصل وخارج منه . ولتسهيل عملية الرسم يلاحظ أن كل الاتجاهات المتشاركة مع نقاط على الدوائر
 $a > 0$ و $a^2 = x^2 + y^2$ لها مقدار a . لذا يظهر المجال كأنه شكل (١) (٢٦-١) باستخدام مقياس رسم
مناسب .



شكل ١ - ٢٦

(ب) هنا كل متجه يساوى ويشاد في الاتجاه المتجه المناظر في (أ) لذلك يظهر المجال كما في شكل ب (١ - ٢٦) .
 في شكل (أ) (١ - ٢٦) المجال له مظهر .. مائع مناسب من نقطة المنبع O ويسكب في الاتجاهات الجيئة لهذا السبب يسمى المجال مجالا متجيباً ونقطة O هي المنبع .
 في شكل (ب) (١ - ٢٦) يظهر المجال مناسباً نحو O ولذلك يسمى المجال مجالاً مصبياً وتسمى نقطة O هي المصب .
 في الأبعاد الثلاثة فإن التفسير المناظران هذا المائع يخرج في اتجاه أنصاف أقطار من خط منبى أو يرجع في اتجاه أنصاف أقطار إلى خط مصبى .
 المجال المتجه يسمى ذا يمين حيث أنه مستقل عن x .

(ج) بما أن مقدار كل متجه هو $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. كل النقط التي على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$ لها متجهات مقدارها a مشاركة معها . المجال يأخذ مظهر المائع الخارج من المنبع O إلى جميع الاتجاهات في الفراغ . وهذا يسمى المجال المتجيب ثلاثى الأبعاد .

مسائل متنوعة

- ٢١- ليأمل بين المتجه واليدى ؟ (أ) طاقة الحركة (ب) شدة المجال الكهربى (ج) أنثروبى (د) الشغل (هـ) القوة الطاردة المركزية (و) درجة الحرارة (ل) جهد الجلائية الأرضية (م) الشحنة (ن) إجهاد التقصر (ى) التردد .
 الحل : (أ) عدى (ب) متجه (ج) عدى (د) عدى (هـ) متجه (و) عدى (ل) عدى (م) عدى (ن) متجه (ى) عدى .

٣٧ - طائرة قطعت 200 km إلى الغرب ثم 150 km في 60° شمال الغرب . أوجد محصلة المسافات (أ) بالرسم .
(ب) بالتحليل .

الحل : المقدار $(50\sqrt{37})$ km الاتجاه $25^\circ 17'$ شمال الشرق $\text{arc Rin } 3\sqrt{111/74}$.

٣٨ - أوجد محصلة الازاحات الآتية (أ) 30° جنوب شرق . (ب) 50 km غرباً (ج) 40 km شمال الشرق
(د) 30 km في 60° جنوب الغرب .

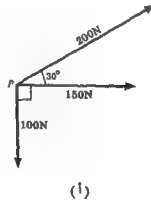
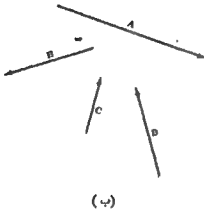
الإجابة : مقدار 20.9 km اتجاه $21^\circ 39'$ جنوب الغرب .

٣٩ - بين بالرسم أن $-(A - B) = -A + B$

٤٠ - جسم P أثرت عليه ثلاث قوى في مستوى واحد كما في شكل ١ - ٢٧ (أ) عين القوة المطلوبة لمنع من الحركة
الإجابة : 323 N مباشرة عكس القوة 150 N .

٤١ - أعطيت المتجهات D و C و B و A وشكل ١ - ٢٧ (ب) كون

$$\frac{1}{2}C + \frac{2}{3}(A - B + 2D) \quad (ب) \quad 3A - 2B - (C - D) \quad (أ)$$



شكل ١ - ٢٧

٤٢ - إذا كان $ABCDEF$ رؤساً سداسياً منتظماً . أوجد محصلة القوى الممثلة بالمتجهات AE و AD و AC و AB
الإجابة 3AD .

٤٣ - إذا كان B و A متجهين بين أن

$$|A - B| \geq |A| - |B| \quad (ب) \quad |A + B| \leq |A| + |B| \quad (أ)$$

٣٩ - بين أن :

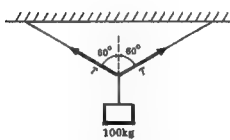
$$|A+B+C| \leq |A| + |B| + |C|$$

٤٠ - مدينتان B و A تقعان مباشرة عكس بعضهما على شاطئ البحر الذي عرضه 8 km . سرعة الماء في البحر 4 km/h ، يقف رجل عند A ويريد أن يصل المدينة C على بعد 6 km مع اتجاه التيار من مدينة B وعلى نفس الشاطئ ، فإذا كانت السرعة المظلي للقارب هي 10 km . وإذا كان يريد الوصول إلى مدينة C في أقل وقت ممكن . أوجد اتجاه القارب وكم من الزمن تستغرق الرحلة ؟

الإجابة : يسير في خط مستقيم بزاوية $34^\circ 28'$ على اتجاه الشاطئ ، والوقت الذي يأخذه ساعة و ٢٥ دقيقة .

٤١ - رجل يسير بسرعة 15 km/h في اتجاه الجنوب لاحظ أن الريح تهب من الغرب . ولما زاد من سرعته إلى 25 km/h لاحظ أن الريح تهب من الجنوب الغربي . أوجد سرعة واتجاه الريح .

الإجابة : الريح تهب باتجاه $56^\circ 18'$ شمال الغرب - وسرعته 18 km/h



شكل ١ - ٢٨

٤٢ - جسم وزنه 100 kg علق في منتصف حبل شكل ١ - ٢٨ .

عين الله T في الحبل .

الإجابة : 100 kg

٤٣ - اكتب في أبسط صورة .

$$2A + B + 3C - \{A - 2B - 2(2A - 3B - C)\}$$

الإجابة : $5A - 3B + C$

٤٤ - إذا كان a و b متجهين لبيان مستوى واحد .

$$a = (x + 4y)a + (2x + y + 1)b \quad (و) \quad b = (y - 2x + 2)a + (2x - 3y - 1)b$$

أوجد y و x بحيث أن $3A = 2B$

الإجابة : $x = -1$ و $y = 2$

٤٥ - أعطيت المتجهات الأساسية a_1 و a_2 و a_3 بدلالة المتجهات الأساسية b_1 و b_2 و b_3 بالسلطات

$$a_1 = 2b_1 + 3b_2 - b_3, \quad a_2 = b_1 - 2b_2 + 2b_3, \quad a_3 = -2b_1 + b_2 - 2b_3$$

فإذا كانت $F = 3a_1 - b_2 + 2a_3$ عبر عن F بدلالة a_1 و a_2 و a_3

الإجابة : $2a_1 + 5a_2 + 3a_3$

٤٦ - إذا فرض أن a و b و c متجهات ليست في مستوى واحد بين إذا كانت المتجهات

علاقة خطية مستقلة أو علاقة خطية غير مستقلة .

$$r_1 = 4a - 5b + c, \quad r_2 = 2a - 3b + c, \quad r_3 = 3a - 5b + 2c$$

الإجابة : علاقة خطية غير مستقلة لأن $r_3 = 5r_1 - 2r_2$

٤٧- إذا كان B و A متجهين يمثلان القطرين في متوازي الأضلاع . كون متوازي الأضلاع هذا .

٤٨- أثبت أن الخط الواصل بين منتصف ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ومقداره يساوي نصفه .

٤٩- (أ) إذا كان O أى نقطة داخل المثلث ABC و P, Q, R هى نقاط منتصفات الأضلاع CA و BC و AB على الترتيب .

اثبت أن : $OA + OB + OC = OP + OQ + OR$

(ب) إذا كانت O خارج المثلث . فهل النتيجة السابقة صحيحة . برهن ذلك .

الإجابة : نعم

٥٠- في الشكل ١ - ٢٩ - $ABCD$ متوازي أضلاع

النقطتين P و Q منتصف الضلعين BC و CD

على الترتيب . اثبت أن AP و AQ يقسمان

القطر BD إلى ثلاثة أجزاء متساوية عند النقط

E و F .

٥١- اثبت أن المستقيمتين المتوسطة في المثلث تتقابل في نقطة

واحدة وتقسمها بنسبة ١ : ٢ .

٥٢- اثبت أن منتصفات زوايا المثلث تتقابل في نقطة واحدة .

٥٣- اثبت أنه يوجد مثلث أضلاعه متساوية وموازية للمستقيمتين المتوسطة لأي مثلث آخر معلوم .

٥٤- المتجهات الموضعية للنقطتين O و Q بالنسبة إلى نقطة الأصل هما q و p على الترتيب . إذا كانت النقطة P تقسم

الخط PQ بنسبة $m:n$. اثبت أن المتجه الموضعي للنقطة R .

يعطى بالعلاقة $r = \frac{mp + nq}{m + n}$ وهي مستقلة عن نقطة الأصل .

٥٥- إذا كانت r_1, r_2, \dots, r_n متجهات موضعية الشكل m_1, m_2, \dots, m_n على الترتيب بالنسبة إلى نقطة الأصل O .

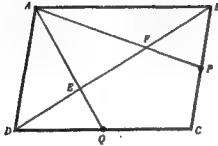
بين أن المتجه الموضعي لمركز ثقل المجموعة يعطى بالعلاقة

$$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

وهذا لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل .

٥٦- شكل رباعي $ABCD$ وضمت الشكل $1, 2, 3, 4$ على الترتيب عند رؤوسه $B(3, 2, -1), C(1, -2, 4)$

$A(-1, -2, 2)$ أوجد إحداثيات مركز ثقل المجموعة . الجواب : $(2, 0, 2)$



شكل ١ - ٢٩

٥٧- بين أن معادلة المستوى التي يمر بالنقط الثلاث A, B, C والتي لا تقع على خط مستقيم واحد ومتجهاتها بالنسبة إلى نقطة O هي a, b, c يمكن كتابتها على الصورة

$$r = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p}$$

حيث m, n, p كميات عددية. وهذه المعادلة لا تعتمد على اختيار الأصل.

٥٨- متجهات الموضع للنقط Q و P تعطى بالعلاقة $r_Q = 4i - 3j + 2k$ ، $r_P = 2i + 3j - k$ ، عين متجه \vec{PQ} بدلالة k, j, i ، أوجد مقداره .
الجواب : $7, 3k, 6j - 2i$

٥٩- إذا كان $A = 3i - j - 4k$ ، $B = -2i + 4j - 3k$ ، $C = i + 2j - k$ أوجد :
(١) $2A - B + 3C$ (ب) $|A + B + C|$ (ج) $|3A - 2B + 4C|$ (د) وحدة متجه موازى لـ $3A - 2B + 4C$

$$\frac{3A - 2B + 4C}{\sqrt{398}} \quad (د) \quad \sqrt{398} \quad (ج) \quad \sqrt{93} \quad (ب) \quad 11i - 8k \quad (أ) \quad \text{الإجابة :}$$

٩٠- القوى الآتية تؤثر على النقطة P :

$$F_1 = 2i + 3j - 5k, F_2 = -3i + j + 3k, F_3 = i - 2j + 4k, F_4 = 4i - 8j - 2k$$

مقاسه بالتونين أوجد (أ) محصلة هذه القوى .
الإجابة : (أ) $\sqrt{5}$ (ب) $2i - j$

٩١- بين في كل حالة هل المتجهات لها علاقة خطية مستقلة أو علاقة خطية معتمدة (غير مستقلة) .

$$A = i - 3j + 2k, B = 2i - 4j - k, C = 3i + 2j - k \quad (ب) \quad A = 2i + j - 3k, B = i - 4k, C = 4i + 3j - k \quad (أ)$$

الإجابة : (أ) علاقة خطية غير مستقلة . (ب) علاقة خطية مستقلة .

٩٢- أثبت أن أي أربع متجهات في الفراغ يجب أن تكون لها علاقة خطية غير مستقلة .

٩٣- أثبت أن الشرط اللازم والكافى لى تكون للمتجهات

$$A = A_1i + A_2j + A_3k, B = B_1i + B_2j + B_3k, C = C_1i + C_2j + C_3k$$

علاقة خطية مستقلة هو أن المحدد $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ لا يساوى صفراً .

٩٤- (أ) أثبت أن المتجهات $A = 3i + j - 2k$ ، $B = -i + 3j + 4k$ ، $C = 4i - 2j - 6k$ يمكن أن تكون أصلاح مثلث

(ب) أوجد أطوال المستقيمتان المتوسطة للمثلث
الجواب : (ب) $\frac{1}{2}\sqrt{114}, \frac{1}{2}\sqrt{150}, \sqrt{6}$

٩٥- إذا فرضنا المجال للمدى $\phi(x, y, z) = 4yz^2 + 3xyz - z^2 + 2$ أوجد (أ) $\phi(1, -1, -2)$ (ب) $\phi(0, -3, 1)$

الإجابة : (أ) 36 (ب) 11

٩٦- ارسم المجال المتجه المعرف (أ) $V(x, y) = xi - yj$ (ب) $V(x, y) = yi - xj$ (ج) $V(x, y, z) = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

الفصل الثاني

ضرب الكميات المتجهة والكميات المندبة

ضرب الكميات المندبة (دات) المتجهين A و B يعرف بـ $A \cdot B$ ويقرأ ($A \text{ dot } B$) ويعرف أنه حاصل ضرب مقدارى المتجهين B و A وجتا الزاوية θ المحصورة بينهما بالرموز

$$A \cdot B = AB \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

ويلاحظ أن $A \cdot B$ هي كمية عددية وليست متجهة

القوانين الآتية صالحة :

- ١ - قانون التبديل للضرب $A \cdot B = B \cdot A$
- ٢ - قانون التوزيع $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- ٣ - حيث m عدد $m(A \cdot B) = (mA) \cdot B = A \cdot (mB) = (A \cdot B)m$
- ٤ - $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, \quad i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

$$\text{إذا } B = B_1 i + B_2 j + B_3 k, \quad A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad \text{فإن}$$

$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$A \cdot A = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$B \cdot B = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

٦ - إذا كان $A \cdot B = 0$ و A و B ليست موجّهات صفرية فإن A و B يكونا متعامدين

ضرب الكميات المتجهة المتجهين A و B هو متجه $C = A \times B$ نقرأ ($A \text{ cross } B$) ومقداره حاصل ضرب المتجهين $A \times B$ تعرف كمحصل ضرب مقادير A و B وجتا الزاوية θ المحصورة بينهما اتجاه المتجه $C = A \times B$ يكون عمودياً على مستوى كل من المتجه A و B وعلى ذلك C و B و A تكون منظومة يمينية وبالرموز

$$A \times B = AB \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

حيث u هي وحدة المتجه التي تدين اتجاه $A \times B$ إذا كانت $A = B$ ، أو إذا كانت A توازي B ، حينئذ $0 = 0$ وتكون $A \times B = 0$.

القوانين الآتية صالحة :

$$A \times B = -B \times A \quad ١ - \text{ (أعطف قانون التبديل للضرب المتجهي)}$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad ٢ - \text{ قانون التوزيع}$$

$$m(A \times B) = (mA) \times B = A \times (mB) = (A \times B)m, \quad ٣ - \text{ حيث } m \text{ كمية عددية}$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0, \quad i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j \quad ٤ -$$

$$\text{إذن} \quad B = B_1 i + B_2 j + B_3 k, \quad A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad ٥ - \text{ إذا كانت}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$٦ - \text{ مقدار } A \times B \text{ تساوي مساحة وتوازي الأضلاع له أضلاعه } A \text{ و } B.$$

$$٧ - \text{ إذا كانت } A \times B = 0 \text{ و } A \text{ و } B \text{ ليست متجهات صفرية حينئذ } A \text{ و } B \text{ يكونان متساويين.}$$

الضربيات الثلاثية ضربيات الكميات العددية والمتجهة لثلاثة متجهات A و B و C يمكن أن ينتج ضربيات ذات معنى بالصيغة الآتية $A \times (B \times C)$ و $A \cdot (B \times C)$ و $(A \cdot B)C$

القوانين الآتية صالحة :

$$(A \cdot B)C \neq A(B \cdot C) \quad ١ -$$

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad ٢ - \text{ تبين متوازي المستطيلات الذي له } A \text{ و } B \text{ و } C$$

كأضلاع ، أو سالباً هذا الحجم تبعاً لما إذا كانت A و B و C تمثل أو لا تعمل حسب منظومة يمين

$$\text{إذا كان } A = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad B = B_1 i + B_2 j + B_3 k, \quad C = C_1 i + C_2 j + C_3 k, \quad \text{و}$$

حينئذ

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$٢ - \quad A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \quad \text{(قانون التوافق للضرب المتجهي غير قائم)}$$

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \\ (A \times B) \times C &= (A \cdot C)B - (B \cdot C)A \end{aligned} \quad ٣ -$$

حاصل ضرب $(B \times C) \cdot A$ في بعض الأحيان يسمى حاصل الضرب المزدوج الثلاثي أو حاصل الضرب المثلثي. حاصل ضرب $A \times (B \times C)$ يسمى حاصل الضرب المتجه الثلاثي. $Box Product$ وأحياناً يعرف بـ $[ABC]$. حاصل ضرب $A \cdot B \times C$ وتكتب $A \cdot B \times C$ (أنظر مسألة ٤١) هل كل حال يجب استعمال الأقواس في $A \times (B \times C)$ (أنظر المسائل ٢٩ و ٤٧)

مجموعة المتجهات العكسية (مقلوبة) مجموعة المتجهات a و b و c و a' و b' و c' تسمى مجموعات عكسية أو أنظمة متجهات إذا كان

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = 1$$

$$a' \cdot b = a' \cdot c = b' \cdot a = b' \cdot c = c' \cdot a = c' \cdot b = 0$$

المجموعات a و b و c و a' و b' و c' تكون مجموعات متجهة عكسية إذا وإذ كان فقط

$$a' = \frac{b \times c}{a \cdot b \times c}, \quad b' = \frac{c \times a}{a \cdot b \times c}, \quad c' = \frac{a \times b}{a \cdot b \times c}$$

حيث $a \cdot b \times c \neq 0$ أنظر مسائل ٥٢-٥٤

مسائل محلولة

ضرب الكميات العددية (دلت)

١ - أثبت أن $A \cdot B = B \cdot A$

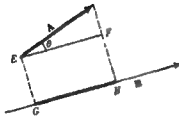
$$A \cdot B = AB \cos \theta = BA \cos \theta = B \cdot A$$

إذن قانون التبديل للضرب المزدوج صحيح.

٢ - أثبت أن إسقاط A على B يكون مساوياً للقيمة $A \cdot b$ حيث b وحدة المتجه في اتجاه B .

الإجابة : خلال نقط البداية والنهاية للمتجه A مرور مستويين عمودية على المتجه B عند G و H على الترتيب شكل ١-٢ إذن

$$\begin{aligned} \text{إسقاط } A \text{ على } B \\ = \overline{GH} = \overline{EF} = A \cos \theta = A \cdot b \end{aligned}$$



شكل ١-٢

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{أثبت أن} \quad \text{٢}$$

ليكن n وحدة المتجه في الاتجاه A حيث يكون إسقاط -

$$(B+C) \text{ على } A = \text{إسقاط } B \text{ على } A + \text{إسقاط } C \text{ على } A$$

$$(B+C) \cdot n = B \cdot n + C \cdot n$$

بالضرب في A

$$(B+C) \cdot A n = B \cdot A n + C \cdot A n$$

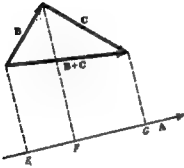
$$(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad \text{و}$$

باستخدام قانون التبديل لضرب العددي

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

إذن قانون التوزيع محقق.

شكل ٢-٢



$$(A+B) \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D \quad \text{أثبت أن} \quad \text{٤}$$

$$(A+B) \cdot (C+D) = A \cdot (C+D) + B \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

قوانين الجبر العادية صالحة لحاصل الضرب العددي .

٥ - احسب كل من الآتي :

$$i \cdot i = |i| |i| \cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1 \quad (أ)$$

$$i \cdot k = |i| |k| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0 \quad (ب)$$

$$k \cdot j = |k| |j| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0 \quad (ج)$$

$$j \cdot (2i - 3j + k) = 2j \cdot i - 3j \cdot j + j \cdot k = 0 - 3 + 0 = -3 \quad (د)$$

$$(2i - j) \cdot (3i + k) = 2i \cdot (3i + k) - j \cdot (3i + k) = 6i \cdot i + 2i \cdot k - 3j \cdot i - j \cdot k = 6 + 0 - 0 - 0 = 6 \quad (هـ)$$

$$B = B_1 i + B_2 j + B_3 k \quad \text{و} \quad A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad \text{إذا كان} \quad \text{٦}$$

$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad \text{أثبت أن}$$

$$A \cdot B = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= A_1 i \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_2 j \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_3 k \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= A_1 B_1 i \cdot i + A_1 B_2 i \cdot j + A_1 B_3 i \cdot k + A_2 B_1 j \cdot i + A_2 B_2 j \cdot j + A_2 B_3 j \cdot k + A_3 B_1 k \cdot i + A_3 B_2 k \cdot j + A_3 B_3 k \cdot k$$

$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

حيث أن $1 = i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ وكل حاصل ضرب المتجهات (الكميات العددية) الأخرى يساوى صفراً.

$$A = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad \text{بين أن} \quad A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad \text{إذا كان} \quad v$$

$$A = \sqrt{A \cdot A} \quad \text{إذن} \quad A \cdot A = (A)(A) \cos 0^\circ = A^2$$

أيضاً

$$\begin{aligned} A \cdot A &= (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \\ &= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \end{aligned}$$

من المسألة ٦ نأخذ $B = A$

$$A^2 \quad \text{حيث} \quad A = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \quad \text{هو مقدار} \quad A \quad \text{بعض الأحيان} \quad A \cdot A \quad \text{تكتب} \quad A^2$$

$$A = 2i + 3j - k \quad \text{و} \quad B = 6i - 3j + 2k \quad \text{أوجد الزاوية بين} \quad A \quad \text{و} \quad B$$

$$A \cdot B = AB \cos \theta, \quad A = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = 3.74 \quad B = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7$$

$$A \cdot B = (2)(6) + (3)(-3) + (-1)(2) = 12 - 9 - 2 = 1$$

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{AB} = \frac{1}{(3.74)(7)} = \frac{1}{26.18} = 0.0382 \quad \text{حيث} \quad \theta = 89.8^\circ$$

٩ - إذا كان $A \cdot B = 0$ وإذا كان A و B ليست صفرية بين أن A عمودية على B .

$$A \cdot B = 0, \quad \theta = 90^\circ \quad \text{و بالعكس إذا كانت} \quad \theta = 90^\circ \quad \text{و} \quad A \cdot B = 0$$

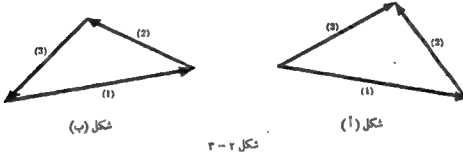
$$A = 2i + 3j + k \quad \text{و} \quad B = 4i - 2j - 2k \quad \text{يكونان متجهين متعامدين}$$

من المسألة (٩) A و B متجهان متعامدين إذا كانت $A \cdot B = 0$

$$A \cdot B = (2)(4) + (3)(-2) + (1)(-2) = 8 - 6 - 2 = 0 \quad \text{حيث} \quad \theta = 90^\circ$$

$$A = 3i - 2j + k, \quad B = i - 3j + 5k, \quad C = 2i + j - 4k \quad \text{بين أن المتجهات} \quad A, B, C \quad \text{تكون مثلثاً قائم الزاوية.}$$

نحن نبين أولاً أن المتجهات تكون مثلثاً



من شكل ٢ - ٣ واضح أن المتجهات ستكون مثلثاً إذا كان :

(أ) أحد المتجهات وليكن (٣) هو محصلة أو مجموع (١) و (٢)

(ب) مجموع أو محصلة المتجهات (١) + (٢) + (٣) يكون صفراً

بما لا ذكر في (أ) المتجهين لهما نقطة نهاية مشتركة أو (ب) ليس لها نقطة نهاية مشتركة . بالمعادلات نجد أن $A = B + C$ بشرط أن تكون المتجهات مثلثاً .

$$A \cdot B = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) = 14, \quad A \cdot C = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4) = 0 \quad \text{حيث}$$

$$B \cdot C = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) = -21 \quad \text{ونبها ينتج أن } A \text{ و } C \text{ يكون متعامدان والمثلث يكون}$$

قائم الزاوية

١٧ - أوجد الزوايا التي يصنعها المتجه $A = 3i - 6j + 2k$ مع الإحداثيات الثلاثة المتعامدة .

ليكن α و β و γ هي الزوايا التي يصنعها A مع الاتجاه الموجب للإحداثيات x و y و z حل الترتيب

$$A \cdot i = (A)(i) \cos \alpha = \sqrt{(3)^2 + (-6)^2 + (2)^2} \cos \alpha = 7 \cos \alpha$$

$$A \cdot i = (3i - 6j + 2k) \cdot i = 3i \cdot i - 6j \cdot i + 2k \cdot i = 3$$

$$36 \alpha = 3/7 = 0.42 \quad \cos \alpha = 64.6^\circ \quad \text{حينئذ تقريباً}$$

$$\cos \beta = -6/7, \quad \beta = 149^\circ \quad \text{و} \quad \cos \gamma = 2/7, \quad \gamma = 73.4^\circ \quad \text{بالمثل}$$

وجيوب تمام الزوايا γ و β و α تسمى جيوب تمام الاتجاه A (أنظر مسألة ٢٧ الفصل الأول)

$$18 - \text{أوجد إسقاط المتجه } A = i - 2j + k \text{ على المتجه } B = 4i - 4j + 7k$$

$$h = \frac{B}{|B|} = \frac{4i - 4j + 7k}{\sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (7)^2}} = \frac{4}{9}i - \frac{4}{9}j + \frac{7}{9}k$$

وحدة المتجه في الاتجاه B يكون إسقاط A على المتجه B يساوي

$$= A \cdot b = (1-2j+k) \cdot \left(\frac{4}{9}i - \frac{4}{9}j + \frac{7}{9}k\right)$$

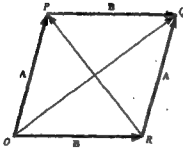
$$= (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{19}{9}$$

١٤ - برهن قانون جيبس انهاء الضلعات المستوية .

$$C = A - B \quad \text{أو} \quad B + C = A \quad (\text{الشكل } 1-2)$$

$$C \cdot C = (A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A + B \cdot B - 2A \cdot B \quad \text{إذن}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta \quad \text{و}$$



شكل (ب)



شكل (أ)

شكل 1-2

١٥ - برهن أن أقطار المربع متعامدة شكل 1-2 ب

$$OQ = OP + PQ = A + B$$

$$RP = A - B \quad \text{و} \quad B + RP = A \quad \text{أو} \quad OR + RP = OP$$

$$A = B \quad \text{أي أن} \quad OQ \cdot RP = (A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2 = 0 \quad \text{إذن}$$

إذن OQ متعامدة على RP

١٦ - أوجد وحدة المتجه المتعامدة على مستوى كل من $A = 2i - 6j - 3k$ و $B = 4i + 3j - k$

ليكن المتجه $C = c_1i + c_2j + c_3k$ متعامدة على المستوى المحتوي كل من A و B سيثبت أن يكون C

متعامدة على A وأيضاً على B وبالتالي

$$2c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0 \quad (1) \quad \text{أو} \quad C \cdot A = 2c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0$$

$$4c_1 + 3c_2 - c_3 = 0 \quad (2) \quad \text{أو} \quad C \cdot B = 4c_1 + 3c_2 - c_3 = 0$$

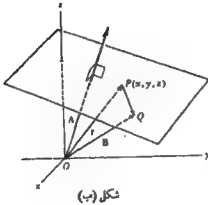
حل المعادلتين (١) ، (٢) آلياً $c_1 = \frac{1}{2}c_3$ ، $c_2 = -\frac{1}{3}c_3$ ، $C = c_3(\frac{1}{2}i - \frac{1}{3}j + k)$

حركته وحدة اتجاه المتجه 'C' هو $\frac{c_3(\frac{1}{2}i - \frac{1}{3}j + k)}{\sqrt{c_3^2[(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{3})^2 + (1)^2]}} = \pm(\frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k)$.

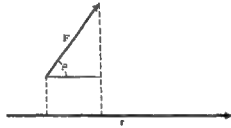
١٧ - أوجد الشغل المبذول لتحريك جسم على طول المتجه $5k + 2j + 3i$ إذا كانت القوة المؤثرة $F = 2i - j - k$ شكل (٢ - أ)

الشغل المبذول = مقدار القوة في اتجاه الحركة (المسافة المتحركة)

$$\begin{aligned} &= (F \cos \theta)(r) = F \cdot r \\ &= (2i - j - k) \cdot (3i + 2j + 5k) = 6 - 2 + 5 = 9 \end{aligned}$$



شكل (ب)



شكل (أ)

شكل ٢ - ب

١٨ - أوجد معادلة المستوى المماس على المتجه $A = 2i + 3j + 6k$ ويمر خلال نقطة نهاية المتجه $B = i + 5j + 3k$ شكل (٢ - ب)

ليكن x المتجه المماسي للنقطة Q و R هي نقطة نهاية المتجه B .

حيث $PQ = B - r$ عمودية على A ، $(B - r) \cdot A = 0$ أو $r \cdot A = B \cdot A$ هي المعادلة المطلوبة لمستوى في شكل متجهي - في الإحداثيات المتعامدة تصبح

$$\begin{aligned} (xi + yj + zk) \cdot (2i + 3j + 6k) &= (i + 5j + 3k) \cdot (2i + 3j + 6k) \quad \text{أو} \\ 2x + 3y + 6z &= (1)(2) + (5)(3) + (3)(6) = 35 \end{aligned}$$

١٩ - في مسألة ١٨ أوجد المسافة بين نقطة الأصل إلى المستوى.

المسافة من نقطة الأصل إلى المستوى هي إسقاط B على A .

$$a = \frac{A}{A} = \frac{2i + 3j + 6k}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (6)^2}} = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k \quad \text{يكون}$$

إذن إسقاط B على A يعطى

$$B \cdot a = (i + 5j + 3k) \cdot \left(\frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k\right) = 1\left(\frac{2}{7}\right) + 5\left(\frac{3}{7}\right) + 3\left(\frac{6}{7}\right) = 5$$

$$A = (A \cdot i)i + (A \cdot j)j + (A \cdot k)k \quad \text{أثبت أن}$$

$$A = A_1i + A_2j + A_3k, \quad A \cdot i = A_1i \cdot i + A_2j \cdot i + A_3k \cdot i = A_1$$

$$\text{بالمثل } A \cdot j = A_2 \text{ و } A \cdot k = A_3$$

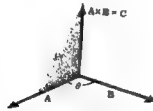
$$A = A_1i + A_2j + A_3k = (A \cdot i)i + (A \cdot j)j + (A \cdot k)k \quad \text{إذن}$$

حاصل ضرب المتجهات :

$$A \times B = -B \times A \quad \text{أثبت أن ٢١ -}$$



شكل (ب)



شكل (أ)

شكل ٢ - ١

$A \times B = C$ لما مقدار $AB \sin \theta$ واتجاه بحيث أن C و B و A تكون منظومة يميني شكل (٢ - ١ أ)

$B \times A = D$ لما مقدار $AB \sin \theta$ واتجاه بحيث أن D و A و B تكون منظومة يميني شكل (٢ - ١ ب)

إذن D لما نفس المقدار مثل C ولكن في الاتجاه العكسي أي أن $C = -D$ أو $A \times B = -B \times A$

وقانون التبديل لحاصل المتجهات غير صالح

٢٢ - إذا كان $A \times B = 0$ وإذا كان A و B غير صفرية بين أن A توازي B

إذا كان $A \times B = 0$ $AB \sin \theta = 0$ $\sin \theta = 0$ $\theta = 0^\circ$ أو $\theta = 180^\circ$

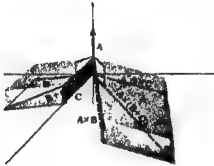
$$\begin{aligned} |A \times B|^2 + |A \cdot B|^2 &= |A|^2 |B|^2 \quad \text{٢٢} \\ |A \times B|^2 + |A \cdot B|^2 &= |AB \sin \theta|^2 + |AB \cos \theta|^2 = A^2 B^2 \sin^2 \theta + A^2 B^2 \cos^2 \theta \\ &= A^2 B^2 = |A|^2 |B|^2 \end{aligned}$$

٢٤ - احسب كلا من الآتي :

$i \times j = k$	(و)	$i \times j = k$	(أ)
$i \times k = -k \times i = -j$	(ز)	$j \times k = i$	(ب)
$(2i) \times (3k) = 6j \times k = 6i$	(ح)	$k \times i = j$	(ج)
$(3i) \times (-2k) = -6i \times k = 6j$	(ط)	$k \times j = -j \times k = -i$	(د)
$2j \times i - 3k = -2k - 3k = -5k$	(ك)	$i \times i = 0$	(هـ)

٢٥ - أثبت أن $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

الحل: لنفرض A عمودية على B وأيضاً على C .



شكل ٢ - ٧

حيث A عمودية على B المتجه $A \times B$ تكون عمودية على المستوى الممتد من A و B ولذا المقدار $AB \sin 90^\circ = AB$ أو مقدار A B معادل لمضرب المتجه B في A ودوراناً محصلة المتجه خلال زاوية مقدارها 90° إلى الموضع المين بشكل ٧ - ٢.

بالمثل $A \times C$ هي المتجه الناتج بواسطة ضرب C في A ودوراناً محصلة المتجه خلال زاوية 90° كما بالشكل.

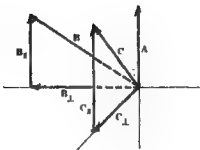
بنفس الطريقة $A \times (B + C)$ هو المتجه الناتج.

بضرب $B + C$ في A وإضافة متجه المحصلة خلال 90° إلى الاتجاه المين.

حيث $A(B + C)$ هو قطر متوازي الأضلاع $A \times B$ و $A \times C$ كأضلاع فيكون $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

٢٦ - أثبت أن $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ في الحالة

العامة حيث C و B و A هي متجهات ليست في مستوى واحد.



شكل ٢ - ٨

بتعويض المتجه B إلى مركبتين أحدهما عمودي على A والآخر مواز لمتجه A ويرمز له بالرموز B_{\perp} و B_{\parallel} على الترتيب إذن $B = B_{\perp} + B_{\parallel}$.

إذا كانت θ هي الزاوية بين A و B إذن $B_{\perp} = B \sin \theta$ لذا المقدار $A \times B_{\perp}$ يكون $A \times B \sin \theta$ بالمثل المقدار $A \times B$ أيضاً اتجاه $A \times B_{\perp}$ يكون له نفس الاتجاه مثل $A \times B$ حيث $A \times B_{\perp} = A \times B$.

بالضرب إذا كانت C إلى مركبتين متجهتين C_{II} و C_{I} الموازي والمماس للنتيجة A على الترتيب إذن
 $A \times C_{II} = A \times C$

$$B + C = B_I + B_{II} + C_I + C_{II} = (B_I + C_I) + (B_{II} + C_{II}) \quad \text{حيث}$$

$$A \times (B_I + C_I) = A \times (B + C).$$

بالتالي

الآن B_{II} و C_{II} متجهات عمودية على A وأيضاً من المسألة ٢٠

$$A \times (B_I + C_I) = A \times B_I + A \times C_I \quad \text{إذن}$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

وقانون التوزيع محقق . بال ضرب في (١-). واستخدام مسألة ٢١ فإن هذا يصبح $(B+C) \times A = B \times A + C \times A$
 تذكر أن رتبة العمليات في حاصل الضرب المتجهي هام . القوانين العادية للغير تنطبق فقط إذا أمكن الحفاظ على الترتيب الملائم .

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad \text{ثبت أن} \quad A = A_1 i + A_2 j + A_3 k \quad \text{and} \quad B = B_1 i + B_2 j + B_3 k \quad \text{— ٢٢}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \times (B_1 i + B_2 j + B_3 k) \\ &= A_1 i \times (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_2 j \times (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_3 k \times (B_1 i + B_2 j + B_3 k) \\ &= A_1 B_1 i \times i + A_1 B_2 i \times j + A_1 B_3 i \times k + A_2 B_1 j \times i + A_2 B_2 j \times j + A_2 B_3 j \times k + A_3 B_1 k \times i + A_3 B_2 k \times j + A_3 B_3 k \times k \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2) i + (A_3 B_1 - A_1 B_3) j + (A_1 B_2 - A_2 B_1) k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

٢٢ـ إذا كان

$$(A + B) \times (A - B) \quad (٢) \quad B \times A \quad (ب) \quad A \times B \quad (١) \quad B = i + 4j - 2k \quad A = 2i - 3j - k$$

$$\begin{aligned} A \times B &= (2i - 3j - k) \times (i + 4j - 2k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad (١) \\ &= i \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10i + 3j + 11k \end{aligned}$$

طريقة أخرى

$$\begin{aligned} (2i - 3j - k) \times (i + 4j - 2k) &= 2i \times (i + 4j - 2k) - 3j \times (i + 4j - 2k) - k \times (i + 4j - 2k) \\ &= 2i \times i + 8i \times j - 4i \times k - 3j \times i - 12j \times j + 6j \times k - k \times i - 4k \times j + 2k \times k \\ &= 0 + 8k + 4j + 3k - 0 + 8i - j + 4i + 0 = 10i + 3j + 11k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A &= (1+4j-2k) \times (2i-3j-k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{ب}) \\ &= i \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10i - 3j - 11k. \end{aligned}$$

بالمقارنة مع (أ) نجد أن $A \times B = -B \times A$. تذكر أن هذه تماثل النظرية إذا تبادلنا صفات في محدد فإن إشارة المحدد تتغير.

(ج)

$$\begin{aligned} A+B &= (2i-3j-k) + (1+4j-2k) = 3i+j-3k \\ A-B &= (2i-3j-k) - (1+4j-2k) = i-7j+k \\ (A+B) \times (A-B) &= (3i+j-3k) \times (i-7j+k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{إذن} \\ &= i \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20i - 6j - 22k. \end{aligned}$$

طريقة أخرى

$$\begin{aligned} (A+B) \times (A-B) &= A \times (A-B) + B \times (A-B) \\ &= A \times A - A \times B + B \times A - B \times B = 0 - A \times B - A \times B - 0 = -2A \times B \\ &= -2(10i+3j+11k) = -20i-6j-22k \quad (\text{أ}) \text{ باستخدام} \end{aligned}$$

٧٩ - إذا كان

$$A \times (B \times C) \quad (\text{ب}) \quad (A \times B) \times C \quad (\text{أ}) \quad \text{أوجد} \quad C = i-2j+2k \quad , \quad B = 2i+j-k \quad A = 3i-j+2k$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & j & -1 \end{vmatrix} = -i+7j+5k. \quad (\text{أ})$$

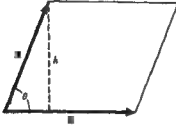
$$\text{إذن} \quad (A \times B) \times C = (-i+7j+5k) \times (i-2j+2k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24i+7j-5k$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0i-5j-5k = -5j-5k \quad (\text{ب})$$

$$\text{إذن} \quad A \times (B \times C) = (3i-j+2k) \times (-5j-5k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15i+15j-15k$$

لذا $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ يبين احتياج الأقواس في اضاعى المتجهات .

٢٠ - أثبت أن مساحة متوازي الأضلاع التي له الأضلاع A و B هي $|A \times B|$.



مساحة متوازي الأضلاع

$$\begin{aligned} &= h|B| \\ &= |A| \sin \theta |B| \\ &= |A \times B|. \end{aligned}$$

تذكر أن مساحة المثلث التي أضلاعه A و B هي $\frac{1}{2} |A \times B|$ لكل ١ - ٢

٢١ - أوجد مساحة المثلث التي رؤوسه هي النقطة الآتية :

$$P(1, 3, 2), Q(2, -1, 1), R(-1, 2, 3)$$

$$\vec{PQ} = (2-1)\mathbf{i} + (-1-3)\mathbf{j} + (1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\vec{PR} = (-1-1)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

من المسألة ٢٠

مساحة المثلث

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} |(1-4\mathbf{j}-\mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{107} \end{aligned}$$

٢٢ - حدد وحدة المتجه العمودي على المستوي، $A = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $B = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

$A \times B$ متجه عمودي على مستوي A و B

$$A \times B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

$$A \times B \text{ is } \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}} = \frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

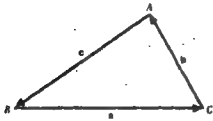
وحدة متجه مواز للكي

وحدة متجه آخر . عكس الاتجاه يكون $(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})/7$

قارن بمسألة ١٦

٢٢ - برهن قانون الجيوب لثلاث المتجه

ولكن a و b و c طول أضلاع المثلث ABC
شكل ١٠-٢ حيث $a = b + c$ شرب في
 $a \times b = b \times c = c \times a$ بالتالي نجد أن



شكل ١٠-٢

$$a \times b = b \times c = c \times a$$

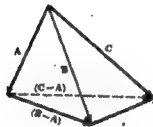
أو أن

$$ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

٢٤ - اجبر دعامي السطح ذا الأوجه F_1 و F_2 و F_3 و F_4

ليكن V_1 و V_2 و V_3 و V_4 متجهات ذات قيم تساوي
مساحات F_1 و F_2 و F_3 و F_4 على الترتيب واتجاهها
عمودية على هذه الأوجه في اتجاه الخارج بين أن
 $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$



شكل ١١-٢

من شأن V_1 مساحة وجه المثلث المحدد بالمتجهات R و S
في $\frac{1}{2} |R \times S|$

للمتجهات المتعامدة لكل وجه من أوجه دعامي السطح تكون

$$V_1 = \frac{1}{2} AB \times C, \quad V_2 = \frac{1}{2} BC \times A, \quad V_3 = \frac{1}{2} CA \times B, \quad V_4 = \frac{1}{2} (C-A) \times (B-A)$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{2} [AB \times C + BC \times A + CA \times B + (C-A) \times (B-A)]$$

$$= \frac{1}{2} [AB \times C + BC \times A + CA \times B + CB \times A - CA \times B - AB \times A] = 0$$

يمكن أن نسم النتائج لتشمل متعدد السطح وفي الحالة المحددة إلى أي سطح مغلق.

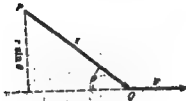
بسبب تطبيق هذه الحالة في بعض الأحيان يكون من المناسب أن نعين اتجاه المساحة ونحكم من مساحة انحناء.

٢٥ - أوجد تعبيراً لزخم القوة F حول النقطة P

لزم M قوة F حول P هي مقدار يساوي حاصل شرب القوة في المسافة العمودية من P إلى

خط تأثير القوة F . حيث إذا كان r متجه من النقطة P إلى
نقطة البداية Q لقوة F

$$M = F(r \sin \theta) = rF \sin \theta = |r \times F|$$

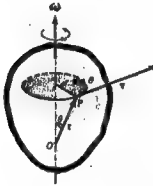


إذا تذكرنا أنشان متجه r يمر عند P عمودية على
مسوى r و F حيث كما يؤثر. القوة F يعود المتجه r

في اتجاه $r \times F$ لذا السبب من الملام تعريف لزم على أن

$$M = r \times F$$

شكل ١٢-٢



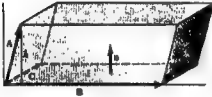
شكل ١٣ - v

٣٦ - يدور جسم صلب حول محور خلال نقطة O بسرعة زاوية ω . أثبت أن السرعة الخطية v للنقطة P على الجسم التي لها المتجه المماسي r يعطى بالعلاقة $v = \omega \times r$ حيث ω هي متجه له مقدار ω وله الاتجاه الأيمن لأصان التلاووظ التي يتقدم تحت الدوران المثل.

حيث P تتحرك في دائرة نصف قطرها $r \sin \theta$ مقدار السرعة الخطية v تكون $v = \omega \times r$ يكون $v \sin \theta = \omega (r \sin \theta)$ أيضا v لابد أن تكون عمودية على كل من r و ω على كل حال v و ω و r تكون منظومة يميني.

إذن v يكون لها مقدار واتجاه $\omega \times r$ حيث $v = \omega \times r$. المتجه ω يسمى السرعة الزاوية.

الضربيات الثلاثية :



شكل ١٤ - v

٣٧ - بين أن القيمة المطلقة لحاصل ضرب الكمية $A \cdot (B \times C)$ يكون مساوية لحجم المكعب الذي جواربه A و B و C .

ليكن Π وحدة السطح متوازي المستطيلات d الاتجاه $B \times C$ وليكن h ارتفاع نقطة نهاية المتجه A أمل متوازي الأضلاع I

حجم متوازي الأضلاع = (الارتفاع) (مساحة متوازي الأضلاع)

$$= (A \cdot n) (|B \times C|)$$

$$= A \cdot \{ |B \times C| n \} = A \cdot (B \times C)$$

إذا كان C و B و A غير مكوّنة لمنظومة يميني $A \cdot n < 0$ والحجم يساوي $|A \cdot (B \times C)|$.

٣٨ - إذا كان $A = A_1i + A_2j + A_3k$, $B = B_1i + B_2j + B_3k$, $C = C_1i + C_2j + C_3k$ بين أن

$$A \cdot (B \times C) = A \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1) - [(B_2C_3 - B_3C_2)A_1 + (B_3C_1 - B_1C_3)A_2 + (B_1C_2 - B_2C_1)A_3]$$

$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$(2i-3j) \cdot [(i+j-k) \times (3i-k)] \quad \text{٢٩ - احسب}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

من مسألة ٢٨ ، النتيجة تكون ٤ .

طريقة أخرى . النتيجة تساوى

$$\begin{aligned} & (2i-3j) \cdot [i \times (3i-k) + j \times (3i-k) - k \times (3i-k)] \\ &= (2i-3j) \cdot [3i \times i - i \times k + 3j \times i - j \times k - 3k \times i + k \times k] \\ &= (2i-3j) \cdot (0 + j - 3k - i - 3j + 0) \\ &= (2i-3j) \cdot (-i - 2j - 3k) = (2i)(-i) + (-3j)(-2j) + (0)(-3k) = 4 \end{aligned}$$

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B) \quad \text{٤٠ - أثبت أن}$$

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad \text{من المسألة ٢٨}$$

من نظرية المحددات والى تقول أن تدبر صفين للمحدد كثير إشارة لدينا

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = B \cdot (C \times A) \\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = C \cdot (A \times B) \end{aligned}$$

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C \quad \text{٤١ - بين أن}$$

$$A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = (A \times B) \cdot C \quad \text{من مسألة ٤٠}$$

أحيانا $(B \times C) \cdot A$ نكتب بدون أقواس $A \cdot B \times C$ في هذه الحالة لا يمكن أن يوجد غموض حيث أن الأقواس الوحيدة الممكنة هي $(B \times C) \cdot A$ أو $(A \cdot B) \times C$ ولو أن الحالة الأخيرة ليس لها معنى حيث أن حاصل ضرب المتجه في العدد غير محدد .

النتيجة $A \cdot B \times C = A \times B \cdot C$ يلخص في بعض الأحيان في جملة أن الكمية العددية أو المتجه يمكن أن تتبادل بدون تأثير على النتيجة .

$$A \cdot (A \times C) = 0 \quad \text{٤٢ - أثبت أن}$$

$$A \cdot (A \times C) = (A \times A) \cdot C = 0 \quad \text{من مسألة ٤١}$$

٤٣ - أثبت أنه الشرط الضروري والكاف لكي تكون المتجهات C و B و A في مستوى واحد هي $A \cdot B \times C = 0$

نذكر أن $A \cdot B = C$ يمكن أن لا يكون لها معنى خلاف $A \cdot (B \times C)$

إذا كان C و B و A في نفس المستوى فإن حجم متوازي المستطيلات المتكون منها يساوي صفراً ومن مسألة ٢٧ $A \cdot B \times C = 0$.

وبالعكس، فإذا كانت $A \cdot B \times C = 0$ فإن حجم متوازي المستطيلات الناتج من الاتجاهات A و B و C يساوي صفراً وكذلك يجب أن تكون الاتجاهات في مستوى واحد.

٤٤ - ليكن $r_0 = x_0i + y_0j + z_0k$ و $r_1 = x_1i + y_1j + z_1k$ و $r_2 = x_2i + y_2j + z_2k$ وضع الاتجاهات الموضعية

النقط $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ و $P_3(x_0, y_0, z_0)$

أوجد معادلة المستوى المار بالنقط P_1 و P_2 و P_3

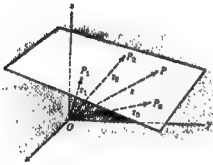
نفترض أن P_1 و P_2 و P_3 غير والئين على نفس الخط المستقيم إذن فهذه النقط تحدد المستوى.

إذا كان $r = xi + yj + zk$ يمثل متجهه مرمى لأي نقطة $P(x, y, z)$ في المستوى. أعتبر الاتجاهات $r_1 = r - r_1$, $r_2 = r - r_2$ و $r_3 = r - r_3$ و $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_3 = r_3 \cdot r_1 = 0$ والكل يقع في المستوى.

من المسألة ٤٢ $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 0$

أو $(x - x_1)(y - y_1)(z - z_1) = 0$

تصبح هذه المعادلة باستخدام الإحداثيات المتعامدة.



شكل ٢ - ١٧

$$[(x - x_1)i + (y - y_1)j + (z - z_1)k] \cdot [(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k] \times [(x_0 - x_1)i + (y_0 - y_1)j + (z_0 - z_1)k] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{أو باستخدام مسألة ٢٨}$$

٤٥ - أوجد معادلة المستوى المحدد بالنقط $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(3, 2, -1)$ و $P_3(-1, 3, 2)$.

الاتجاهات الموضعية P_1, P_2, P_3 وأي نقطة $P(x, y, z)$ على الترتيب

$$r_1 = 2i - j + k, \quad r_2 = 3i + 2j - k, \quad r_3 = -i + 3j + 2k \quad \text{و} \quad r = xi + yj + zk$$

إذن $r \cdot r_1 = r \cdot r_2 = r \cdot r_3 = 0$ الكل يقع في المستوى المطلوب وبالتالي

$$(r - r_1) \cdot (r_2 - r_1) \times (r_3 - r_1) = 0$$

$$[(x - 2)i + (y + 1)j + (z - 1)k] \cdot [i + 3j - 2k] \times [-3i + 4j + k] = 0 \quad \text{أي أنه}$$

$$[(x - 2)i + (y + 1)j + (z - 1)k] \cdot [11i + 5j + 13k] = 0$$

$$11(x - 2) + 5(y + 1) + 13(z - 1) = 0 \quad \text{أو} \quad 11x + 5y + 13z = 30$$

٤٦ - إذا كانت النقط P, Q, R ليست كلها واقعة على نفس الخط المستقيم ولها الاتجاهات الموضعية a, b, c بالنسبة لنقطة الأصل الممتدة. بين أن $a \times b + b \times c + c \times a = 0$ هو متجه مرموز على مستوى P, Q, R .

ليكن r متجه مرمى لأي نقطة في المستوى P, Q, R إذن الاتجاهات a, b, c و $r - a, r - b, r - c$ تكون في مستوى r فذلك من المسألة ٤٢

$$(r - a) \cdot (b - a) \times (c - a) = 0 \quad \text{أو} \quad (r - a) \cdot (a \times b + b \times c + c \times a) = 0$$

تأخذ P, Q, R يكون عموماً على $R = A$ وبالتالى عموماً على المستوى الممتد P, Q, R

$$(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - A(B \cdot C) \quad \text{ب} \quad A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (1)$$

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad B = B_1 i + B_2 j + B_3 k, \quad C = C_1 i + C_2 j + C_3 k \quad (1) \text{ ليكن}$$

$$A \times (B \times C) = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad \text{إذن}$$

$$= (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \times ([B_2 C_3 - B_3 C_2] i + [B_3 C_1 - B_1 C_3] j + [B_1 C_2 - B_2 C_1] k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_2 C_3 - B_3 C_2 & B_3 C_1 - B_1 C_3 & B_1 C_2 - B_2 C_1 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2 B_3 C_1 - A_3 B_2 C_1 - A_1 B_3 C_2 + A_1 B_2 C_3) i + (A_3 B_1 C_2 - A_2 B_1 C_3 - A_1 B_2 C_1 + A_1 B_3 C_2) j$$

$$+ (A_1 B_2 C_1 - A_1 B_3 C_2 - A_2 B_1 C_3 + A_2 B_3 C_1) k \quad \text{إن}$$

$$B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$= (B_1 i + B_2 j + B_3 k)(A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - (C_1 i + C_2 j + C_3 k)(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)$$

$$= (A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 - A_1 B_2 C_3 - A_2 B_1 C_3) i + (B_2 A_1 C_3 + B_3 A_2 C_1 - C_1 A_3 B_1 - C_2 A_1 B_2) j$$

$$+ (B_3 A_1 C_2 + B_1 A_2 C_3 - C_3 A_2 B_1 - C_1 A_3 B_2) k \quad \text{وننتج النتيجة}$$

$$A, B, C \text{ باحلال } (A \times B) \times C = -C \times (A \times B) = -\{A(C \cdot B) - B(C \cdot A)\} = B(A \cdot C) - A(B \cdot C) \quad (ب)$$

في (1) A, B, C على الترتيب

يلاحظ أن $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ أى أن قانون تراكب الضرب المتجهي غير صالح لكل المتجهات A, B, C

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C) \quad \text{أثبت 4A}$$

من المسألة 41 إذن $X \cdot (C \times D) = (X \times C) \cdot D$ ليكن $X = A \times B$ إذن

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = \{(A \times B) \times C\} \cdot D = \{B(A \cdot C) - A(B \cdot C)\} \cdot D$$

$$= (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C), \quad \text{بإستخدام المسألة رقم 47 (ب)}$$

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0. \quad \text{أثبت 48}$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad \text{من مسألة 47 (1)}$$

$$B \times (C \times A) = C(B \cdot A) - A(B \cdot C)$$

$$C \times (A \times B) = A(C \cdot B) - B(C \cdot A)$$

بالجمع نحصل على النتيجة

$$(A \times B) \times (C \times D) = B(A \cdot C \times D) - A(B \cdot C \times D) = C(A \cdot B \times D) - D(A \cdot B \times C). \quad \text{أثبت 49}$$

$$X = A \times B \quad \text{ليكن} \quad X \times (C \times D) = C(X \cdot D) - D(X \cdot C) \quad (1-47)$$

إذن

$$\begin{aligned}(A \times B) \times (C \times D) &= C(A \times B \cdot D) - D(A \times B \cdot C) \\ &= C(A \cdot C \times D) - D(A \cdot B \times C)\end{aligned}$$

من مسألة (٤٧ - ب) $(A \times B) \times Y = B(A \cdot Y) - A(B \cdot Y)$ ليكن $Y = C \times D$:

$$(A \times B) \times (C \times D) = B(A \cdot C \times D) - A(B \cdot C \times D) \quad \text{إذن}$$

٥١ - ليكن PQR مثلثا كرويا له الجوانب p, q, r عبارة عن أقواس من دوائر كبيرة. أثبت أن

$$\frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

نفرض أن قطر الكرة هو الوحدة (أنظر شكل ٧ - ٦) إذا كانت وحدة المتجهان A, B, C له رسمت من مركز الكرة O إلى P, Q, R على الترتيب فن المسألة ٥٠

$$(A \times B) \times (A \times C) = (A \cdot B \times C)A \quad (١)$$

وحدة المتجه المموض على $A \times B$ و $A \times C$ هو A

وبالتالي (١) تصبح

$$\sin r \sin q \sin P \cdot A = (A \cdot B \times C)A \quad (٢)$$

$$\sin r \sin q \sin P = A \cdot B \times C \quad (٣)$$

بالتبادل الدوري للكميات P, Q, R, A, B, C نحصل على

$$\sin p \sin r \sin Q = B \cdot C \times A \quad (٤)$$

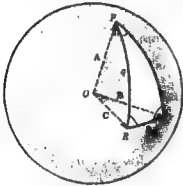
$$\sin q \sin p \sin R = C \cdot A \times B \quad (٥)$$

إذن حيث أن أطراف الأيمن للمعادلات (٢)، (٤)، (٥) متساوية (مسألة ٤٠)

$$\sin P = \sin p \sin r \sin Q = \sin q \sin p \sin R$$

$$\frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

وهذا يسمى قانون الجيوب المثلث الكروي



شكل ٧-٦

$$(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = (A \cdot B \times C)^2 \quad \text{٥٢ - أثبت أن}$$

من مسألة (٤٧ - أ) $X \times (C \times A) = C(X \cdot A) - A(X \cdot C)$ ليكن $X = B \times C$ إذن

$$\begin{aligned}(B \times C) \times (C \times A) &= C(B \times C \cdot A) - A(B \times C \cdot C) \\ &= C(A \cdot B \times C) - A(B \cdot C \times C) = C(A \cdot B \times C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) &= (A \times B) \cdot C(A \cdot B \times C) \\ &= (A \cdot B \cdot C)(A \cdot B \times C) = (A \cdot B \times C)^2\end{aligned}$$

٥١ - أعطيت المتجهات a, b, c بحيث $a \cdot b \times c \neq 0$ بين أنه إذا كان $a' = \frac{b \times c}{a \cdot b \times c}$, $b' = \frac{c \times a}{a \cdot b \times c}$ و $c' = \frac{a \times b}{a \cdot b \times c}$

$$a' \cdot a = b' \cdot b = c' \cdot c = 1, \quad (1)$$

$$a' \cdot b = a' \cdot c = 0, \quad b' \cdot a = b' \cdot c = 0, \quad c' \cdot a = c' \cdot b = 0, \quad (2)$$

$$a' \cdot b' \times c' = 1/V \quad \text{إذن} \quad \text{If } a \cdot b \times c = V \quad (3)$$

أي a', b', c' اتجاهات ليست في مستوى واحد إذا لم تكن a, b, c في مستوى واحد

$$a' \cdot a = a \cdot a' = a \cdot \frac{b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1 \quad (1)$$

$$b' \cdot b = b \cdot b' = b \cdot \frac{c \times a}{a \cdot b \times c} = \frac{b \cdot c \times a}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$$

$$c' \cdot c = c \cdot c' = c \cdot \frac{a \times b}{a \cdot b \times c} = \frac{c \cdot a \times b}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$$

$$a' \cdot b = b \cdot a' = b \cdot \frac{b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{b \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{b \times b \cdot c}{a \cdot b \times c} = 0 \quad (2)$$

بالمثل يمكن الحصول على النتائج الأخرى. النتائج يمكن الحصول عليها إذا لاحظنا مثلا أن: المتجه a' له اتجاه

$$b \times c \text{ وبالمثل لابد أن يكون عموديا على كل } b \text{ و } c \text{ ومنها } a' \cdot b = 0 \text{ و } a' \cdot c = 0$$

من (1) ، (2) ، (3) نلاحظ أن مجموعة المتجهات a, b, c و a', b', c' تكون عيشتا متعامدة

المسائل المتنوعة ١٠٤ و ١٠٦

$$a' = \frac{b \times c}{V}, \quad b' = \frac{c \times a}{V}, \quad c' = \frac{a \times b}{V} \quad (3)$$

$$a' \cdot b' \times c' = \frac{(b \times c) \cdot (c \times a) \times (a \times b)}{V^3} = \frac{(a \times b) \cdot (b \times c) \times (c \times a)}{V^3} \quad \text{إذن}$$

$$\text{باستخدام مسألة ٥٢} \quad = \frac{(a \cdot b \times c)^2}{V^3} = \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V}$$

(د) من مسألة ٤٢ إذا كانت المتجهات a, b, c ليست في مستوى واحد $a \cdot b \times c \neq 0$ إذن من الجزء (د) يتبع أن

$$a' \cdot b' \times c' \neq 0 \text{ بحيث أن } a', b', c' \text{ ليست في مستوى واحد}$$

٥٤ - بين أن أي متجه r يمكن التعبير عنه بمجموعة المتجه المتكسي المثلث بالمسألة ٥٢.

$$r = (r \cdot a')a + (r \cdot b')b + (r \cdot c')c$$

$$B(A \cdot C \times D) - A(B \cdot C \times D) = C(A \cdot B \times D) - D(A \cdot B \times C) \quad \text{من المسألة (٥٠)}$$

$$B = \frac{A(B \cdot C \times D)}{A \cdot B \times C} - \frac{B(A \cdot C \times D)}{A \cdot B \times C} + \frac{C(A \cdot B \times D)}{A \cdot B \times C} \quad \text{إذن}$$

$$A = a, B = b, C = c \text{ و } D = r \quad \text{ليكن}$$

$$r = \frac{r \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} a + \frac{r \cdot c \times a}{a \cdot b \times c} b + \frac{r \cdot a \times b}{a \cdot b \times c} c$$

$$= r \cdot \left(\frac{b \times c}{a \cdot b \times c} \right) a + r \cdot \left(\frac{c \times a}{a \cdot b \times c} \right) b + r \cdot \left(\frac{a \times b}{a \cdot b \times c} \right) c$$

$$= (r \cdot a')a + (r \cdot b')b + (r \cdot c')c$$

مسائل متنوعة

- ٥٥ - احسب (أ) $k \cdot (i + j)$ (ب) $(i - 2k) \cdot (j + 3k)$ (ج) $(2i - j + 3k) \cdot (3i + 2j - k)$
 الإجابة : (أ) 0 (ب) 8 (ج) 2.
- ٥٦ - إذا كان $A = i + 3j - 2k$ و $B = 4i - 2j + 4k$ أوجد
 (أ) $A \cdot B$ (ب) $A \cdot A$ (ج) B (د) $|3A + 2B|$ (هـ) $(2A + B) \cdot (A - 2B)$
 (أ) -10 (ب) $\sqrt{34}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\sqrt{186}$ (هـ) -14
- ٥٧ - أوجد الزاوية بين (أ) $A = 3i + 2j - 6k$ و $B = 4i - 3j + k$ (ب) $B = 4i - 2j + 4k$ و $C = 3i - 6j - 2k$ و $D = 3i - 6j - 2k$
 (أ) 90° (ب) $\arccos 8/21$ (ج) $87^\circ 36'$
- ٥٨ - لأي قيمة a تكون $B = 2a i + a j - 4k$ و $A = a i - 2j + k$ عمودية ؟ الإجابة $a = 2, -1$
- ٥٩ - أوجد الزاوية الحادة التي يصنعها الخط الواصل بين النقطتين $(1, -3, 2)$ و $(3, -5, 2)$ والاحداثيات المتعامدة
 الإجابة $48^\circ 12', 48^\circ 12', 70^\circ 32', \arccos 1/3, \arccos 2/3, \arccos 2/3$
- ٦٠ - أوجد اتجاه جهوب انتماء الواصل بين النقط $(3, 2, -4)$ و $(1, -1, 2)$
 الإجابة $2/7, 3/7, -6/7$ أو $-2/7, -3/7, 6/7$
- ٦١ - ضلعان من أضلاع المثلث تتكونان من المتجهين $B = 4i - j + 3k$ و $A = 3i + 6j - 2k$ حدد رؤيا المثلث
 الإجابة $90^\circ, 83^\circ 56', 36^\circ 4'$ أو $90^\circ, \arccos \sqrt{36}/\sqrt{75}, \arccos 7/\sqrt{75}$
- ٦٢ - أعطيت أنماط متوازي الأضلاع بالمتجهين $B = 2i + 3j - 6k$ و $A = 3i - 4j - k$ بين أن متوازي الأضلاع يكون
 ممثلاً. واحسب أطوال أضلاعه وزواياه
 الإجابة $10^\circ 32', 72^\circ 8', 4.33, \arccos 23/75, 180^\circ - \arccos 23/75, 5\sqrt{5}/2$
- ٦٣ - أوجد إسقاط المتجه $6k + 3j + 2i$ على المتجه $2k + 2j + i$ الإجابة $3/3$
- ٦٤ - أوجد إسقاط المتجه $k + 3j + 4i$ على الخط الواصل بين النقط $(1, 3, 2)$ و $(-2, -4, 3)$ الإجابة ١.
- ٦٥ - إذا كان $B = -2i + j - 2k$ و $A = 4i - j + 3k$ أوجد وحدة المتجه العمودي على كل من A و B
 الإجابة $(1 - 2j - 2k)/3$
- ٦٦ - أوجد الزاوية الحادة المحصورة بين قطري المكعب . الإجابة $70^\circ 32' \cos 1/3$
- ٦٧ - أوجد وحدة المتجه الموازي للمستوى xy وعمودي على المتجه $k + 3j - 4i$ الإجابة $(3i + 4j)/5$
- ٦٨ - بين أن $C = (2i + j - 2k)/3$ و $B = (i + 2j + 2k)/3$ و $A = (2i - 2j + k)/3$ هي وحدة المتجهات العمودية المتبادلة.
- ٦٩ - أوجد السيل المينول لتحريك جسم على خط مستقيم بين $(1, -3, 2)$ إلى $(2, -1, 4)$ في مجال القوة المسطة
 بالمعادلة $F = 4i - 3j + 2k$ الإجابة 15
- ٧٠ - ليكن F متجهاً ثابتاً بقوة الجبال. بين أن الشغل المبذول في تحريك جسم حول أي مضلع مغلق في مجال لقوة يساوي صفراً.

٧١ - أثبت أن الزاوية المحصورة في نصف الدائرة تكون قائمة .

٧٢ - ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع أثبت أن $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2$

٧٣ - إذا كان $ABCD$ شكلاً رباعياً وكانت P و Q هي نقط منتصف الأقطار أثبت أن

$$\overline{AQ}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{DQ}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2$$

وهذا هو تعميم للسؤال السابقة

٧٤ - (١) أوجد معادلة المستوى العمودي على المتجه A والمسافة p من نقط الأصل .

(ب) عبر عن المعادلة التي في (١) بالأحداثيات الثلاث السردية

الإجابة : (١) $x \cdot a = p$ حيث $a = A/A$ (ب) $A_1x + A_2y + A_3z = Ap$

٧٥ - ليكن r_1 و r_2 هي وحدة المتجهات في المستوى xy والتي تصنع زاوية مقدارها α و β مع الاتجاه الموجب لمحور x

(١) أثبت أن $r_2 = \cos \alpha i + \sin \alpha j$ ، $r_1 = \cos \beta i + \sin \beta j$

(ب) باعتبار r_1 ، r_2 أثبت القوانين المتلينة

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

٧٦ - ليكن a هو متجه الموضع لنقطة معلومة (x_1, y_1, z_1) والمتجه r هو متجه الموضع لأي نقطة (x, y, z) أوجد المحل

المستوي المتجه r إذا كان (١) $|r - a| = 3$ (ب) $(r - a) \cdot a = 0$ (ج) $(r - a) \cdot r = 0$

الإجابة : (١) كرة مركزها عند النقطة (x_1, y_1, z_1) ونصف قطرها ٣

(ب) مستوى عمودي على a ويمر خلال نقطة نهايته

(ج) كرة مركزها عند النقطة $(x_1/2, y_1/2, z_1/2)$ ونصف قطرها مقدار $\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

أو كرة قطرها a .

٧٧ - أعطيت المتجهين الموضعيين $A = 3i + j + 2k$ و $B = i - 2j - 4k$ لتنتظين P و Q على الترتيب .

(١) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة Q وعمودي على الخط PQ

(ب) ما هي المسافة بين النقطة $(-1, 1, 1)$ والمستوى ؟

الإجابة : (١) $(r - B) \cdot (A - B) = 0$ أو $2x + 3y + 6z = -28$ (ب) ٥

٧٨ - أحسب كلاً من الآتي :

$$(4i + j - 2k) \times (3i + k) \quad (د) \quad (2i - 4k) \times (i + 2j) \quad (ج) \quad (i + 2j) \times k \quad (ب) \quad 2j \times (3i - 4k) \quad (١)$$

$$(2i + j - k) \times (3i - 2j + 4k) \quad (د)$$

$$2i - 11j - 7k \quad (د) \quad i - 10j - 3k \quad (د) \quad 8i - 4j + 4k \quad (ج) \quad 2i - j \quad (ب) \quad -8i - 6k \quad (١)$$

٧٩ - إذا كان $A = 3i - j - 2k$ و $B = 2i + 3j + k$ أوجد : (١) $|A \times B|$ (ب) $(A + 2B) \times (2A - B)$ ،

$$|(A + B) \times (A - B)| \quad (ج)$$

الإجابة : (١) $\sqrt{195}$ (ب) $-25i + 35j - 55k$ (ج) $2\sqrt{195}$

٨٠ - إذا كان $A = i - 2j - 3k$ و $B = 2i + j - k$ و $C = i + 3j - 2k$ أوجد

$$(A \times B) \times (B \times C) \quad (د) \quad A \cdot (B \times C) \quad (ج) \quad |(A \times B) \times C| \quad (١)$$

$$(A \times B)(B \cdot C) \text{ (د) } , (A \times B) \cdot C \text{ (د) } , |A \times (B \times C)| \text{ (ب)}$$

$$\text{الإجابة : (1) } 5\sqrt{26} \text{ (ب) } 3\sqrt{10} \text{ (ج) } -20 \text{ (د) } -20 \text{ (هـ) } -40i - 20j + 20k$$

$$A \cdot B = A \cdot C \text{ (ب) } A \times B = A \times C \text{ متحققين انيا إذا } B = C \text{ ولكن إذا تحقق شرط واحد من هذين شرطين فلا بد من الضروري أن تكون } C \text{ متجه}$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 1 \text{ (ب) } A \cdot B = A \cdot C \text{ (1) } A \cdot B = A \cdot C \text{ متحققين انيا إذا } B = C \text{ ولكن إذا تحقق شرط واحد من هذين شرطين فلا بد من الضروري أن تكون } C \text{ متجه}$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

$$A \cdot B = 5\sqrt{3} \text{ الإجابة : } A = 2i + j - 2k \text{ و } B = i - 2j + 4k$$

٩٤ - برهن أنه الشرط اللازم والكناف لكي $(A \times C) \times B = 0$ هو $(A \times B) \times C = 0$.
الحالات التي فيها $A \cdot B = 0$ أو $B \cdot C = 0$

٩٥ - لنكن متجهات الموضع بالنسبة لنقطة الأصل O ، لنقط R, P, Q هي $r_1 = 3i - 2j - k$ ، $r_2 = i + 2j + 4k$ ، $r_3 = 2i + j - 2k$.
أوجد المسافة بين النقطة P والمستوى OQR الإجابة : 3

٩٦ - أوجد أقصر مسافة بين النقطة $(4, -4, 6)$ والخط الذي يصل النقطتين $(2, 1, 2)$ و $(3, -1, 4)$ الإجابة 3

٩٧ - أعطيت النقط $S(1, -4, 0)$ و $P(2, 1, 3)$ ، $Q(1, 2, 1)$ ، $R(-1, -2, -2)$.
أوجد أقصر مسافة بين الخطين RS و PQ الإجابة : $3\sqrt{2}$

٩٨ - أثبت أن الأعمدة الساقطة من رؤوس المثلث على أضلعه المقابلة (تمتد إذا كان من الضروري) تتقابل في نقطة (ملتقى الارتفاقات للمثلث) .

٩٩ - أثبت أن منصفات الأعمدة لأضلاع المثلث تتقابل في نقطة (مركز الدائرة المحيطة بالمثلث) .

$$100 - \text{أثبت أن } (A \times B) \cdot (C \times D) + (B \times C) \cdot (A \times D) + (C \times A) \cdot (B \times D) = 0$$

١٠١ - ليكن PQR مثلثا كرويا له الأضلاع p, q, r عبارة عن أقواس من دوائر كبيرة . أثبت أن جيوب الزوايا
لمثلث الكروي هو

$$\cos p = \cos q \cos r + \sin q \sin r \cos P$$

باستخدام صيغة التشابه $\cos r \cos q$ يمكن الحصول عليها بالتبادل القوي للزوايا

$$(A \times B) \cdot (A \times C) = (B \cdot C)(A \cdot A) - (A \cdot C)(B \cdot A)$$

١٠٢ - أوجد مجموعة المتجهات المتكفية لمجموعة $2i + 3j - k$ ، $i - j - 2k$ ، $-i + 2j + 2k$

$$\text{الإجابة : } \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}k, -\frac{8}{3}i + j - \frac{7}{3}k, -\frac{7}{3}i + j - \frac{8}{3}k$$

١٠٣ - إذا كان $a' = \frac{b \times c}{a \cdot b \times c}$ ، $b' = \frac{c \times a}{a \cdot b \times c}$ ، $c' = \frac{a \times b}{a \cdot b \times c}$ أثبت أن

$$a = \frac{b' \times c'}{a' \cdot b' \times c'}, \quad b = \frac{c' \times a'}{a' \cdot b' \times c'}, \quad c = \frac{a' \times b'}{a' \cdot b' \times c'}$$

١٠٤ - إذا كانت المتجهات a, b, c و a', b', c' كالاتي

$$a' \cdot a = b' \cdot b = c' \cdot c = 1$$

$$a' \cdot b = a' \cdot c = b' \cdot a = b' \cdot c = c' \cdot a = c' \cdot b = 0$$

أثبت أنه من اللازم أن

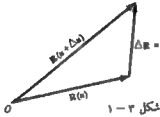
$$a' = \frac{b \times c}{a \cdot b \times c}, \quad b' = \frac{c \times a}{a \cdot b \times c}, \quad c' = \frac{a \times b}{a \cdot b \times c}$$

١٠٥ - أثبت أن مجموعات المتجهات الثنائية المتكافئة الوحيدة هي وحدة للمتجهات i, j, k

١٠٦ - أثبت أنه يوجد فقط مجموعة واحدة من المتجهات المتكفية لمجموعة معلومة a, b, c من المتجهات غير الزاوية في مستوى واحد .

الفصل الثالث

تفاضل المتجه



شكل ٣-١

المشتقات العادية للمتجهات : ليكن $R(u)$ متجه

متوقف على متغير حاد فردي u إذن

$$\frac{\Delta R}{\Delta u} = \frac{R(u+\Delta u) - R(u)}{\Delta u}$$

حيث Δu تبين زيادة في u أنظر

المشتقة العادية لمتجه $R(u)$ بالنسبة للتغير المادي u يعطى بالمعادلة الآتية

$$\frac{dR}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{R(u+\Delta u) - R(u)}{\Delta u}$$

إذا وجدت الحدود (النهايات)

حيث أن $\frac{dR}{du}$ هو نفسه متجه يتوقف على u . فإنه يمكننا أن نعتبر مشتقها بالنسبة إلى u ، وإذا كانت هذه المشتقة موجودة فإنها تعرف بالكتب $\frac{d^2R}{du^2}$ يمثل هذه الطريقة يمكن وصف المشتقات ذات الرتبة الأعلى .

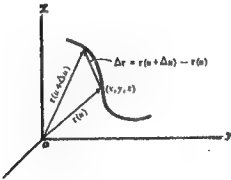
منحنيات الفراغ : إذا كان بسطة خاصة $R(u)$ هو متجه موصى $r(u)$ يربط نقطة الأصل O لنظام إحداثيات وأى نقطة (x, y, z) إذن

$$r(u) = x(u)i + y(u)j + z(u)k$$

ومواصفات دالة المتجه $r(u)$ تعرف x, y, z كدالة في u .

عندما نتغير u ، نقطة نهاية المتجه r ترسم منحنى فراغ له البرامرية الآتية

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$



شكل ٣-٢

$$\text{حيث } \frac{\Delta r}{\Delta u} = \frac{r(u+\Delta u) - r(u)}{\Delta u} \text{ متجه في اتجاه } \Delta r$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta u} = \frac{dr}{du} \text{ (نحل } r = r(u) \text{) إذا كان } \frac{dr}{du}$$

موجودة . فإن النهايات سوف تكون متجهياً في

اتجاه المماس للمنحنى الفراغ عند (x, y, z) والمحلل بالمعادلة

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dz} \cdot \frac{dz}{dz}$$

إذا كان u هو الزمن t و $\frac{dz}{dt}$ تمثل السرعة v التي بواسطة نقطة نهاية المتجه \vec{v} يرسم المنحنى . بالتل $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ تمثل عجلتها a على طول المنحنى

الاستمرار والتفاضلية (التفاضلية للتفاضل): الدالة البديلة $\phi(u)$ تسمى دالة مستمرة عند u إذا كان $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \phi(u + \Delta u) = \phi(u)$ وبالتكافؤ ، $\phi(u)$ مستمرة عند u إذا كان لكل عدد موجب ϵ يمكننا إيجاد عدد موجب δ بشرط

$$|\Delta u| < \delta \quad \text{عندما} \quad |\phi(u + \Delta u) - \phi(u)| < \epsilon$$

دالة المتجه $R(u) = R_1(u)i + R_2(u)j + R_3(u)k$ تسمى مستمرة عند u إذا كانت الدوال الثلاث المكونة $R_1(u), R_2(u), R_3(u)$ مستمرة عند u أو إذا $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} R(u + \Delta u) = R(u)$. بالتكافؤ $R(u)$ تكون مستمرة عند u إذا كان لكل عدد موجب ϵ يمكننا إيجاد عدد موجب δ بشرط

$$|\Delta u| < \delta \quad \text{عندما} \quad |R(u + \Delta u) - R(u)| < \epsilon$$

دالة متجهة أو عددية في u تسمى قابلة للتفاضل من الرتبة n إذا كانت مشتقاتها n th موجودة الدالة التي يمكن تفاضلها لابد أن تكون مستمرة ولكن العكس غير صحيح . مالم ينص حل غير ذلك فإننا نفترض أن كل الدوال يمكن تفاضلها لأي رتبة نلزمنا في مناقشة خاصة .

صيغة التفاضل : إذا كان C و B و A دوال متجهة قابلة للتفاضل لكتبة عددية u و ϕ دالة عددية قابلة للتفاضل في u فإن

$$\frac{d}{du} (A + B) = \frac{dA}{du} + \frac{dB}{du} \quad - 1$$

$$\frac{d}{du} (A \cdot B) = A \cdot \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \cdot B \quad - 2$$

$$\frac{d}{du} (A \times B) = A \times \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \times B \quad - 3$$

$$\frac{d}{du} (\phi A) = \phi \frac{dA}{du} + \frac{d\phi}{du} A \quad - 4$$

$$\frac{d}{du} (A \cdot B \times C) = A \cdot B \times \frac{dC}{du} + A \cdot \frac{dB}{du} \times C + \frac{dA}{du} \cdot B \times C \quad - 5$$

$$\frac{d}{du} \{ A \times (B \times C) \} = A \times (B \times \frac{dC}{du}) + A \times (\frac{dB}{du} \times C) + \frac{dA}{du} \times (B \times C) \quad - 6$$

الرتبة في هذه الضربيات يمكن أن تكون مهمة .

التفاضل الجزئي للمتجهات : إذا كان المتجه A يعتمد على أكثر من متغير عددي وليكن x, y, z مثلا . حينئذ

نكتب $A = A(x, y, z)$. التفاضل الجزئي لمتجه A بالنسبة إلى x كالآتي

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x, y, z) - A(x, y, z)}{\Delta x}$$

إذا وجدت النهايات فبالتأني

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{A(x, y + \Delta y, z) - A(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A(x, y, z + \Delta z) - A(x, y, z)}{\Delta z}$$

هي المشتقات الجزئية لمتجه A بالنسبة إلى x, y, z على الترتيب أو وجدت هذه النهايات .

الملاحظات على الاستمرار وقابلية التفاضل للدوال ذات المتغير الواحد يمكن التوسع فيها لدوال ذات متغيرين أو أكثر .

كثال $\phi(x, y)$ ϕ تسمى مستمرة عند (x, y) إذا كان $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \phi(x, y)$ أو إذا

كان لكل عدد موجب $\epsilon \in$ يمكننا إيجاد عدد موجب δ بحيث أن $|\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y)| < \epsilon$ كلما $|\Delta y| < \delta$ و $|\Delta x| < \delta$ تعاديف مماثلة صحيحة للدوال المتجه

الدوال ذات متغيرين أو أكثر تستعمل العبارة قابل للتفاضل لتعني أن الدالة مشتقات جزئية أولى مستمرة (استخدم هذا التعبير بأخرين وبقلب من الإدراك الضعيف) .

يمكن تعريف المشتقات الأعلى كما في حساب التفاضل والتكامل . لذلك كئال

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)$$

إذا كان A له تفاضل جزئي مستمر من الرتبة الثانية على الأقل إذن $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}$ أي أن رتبة التفاضل ليست مهمة .

قواعد التفاضل الجزئي للمتجهات تشابه تلك المستعملة في حساب التفاضل والتكامل للدوال البديية . لذا إذا كان A و B دوال في x, y, z إذن كئال .

$$\frac{\partial}{\partial x}(A \cdot B) = A \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot B \quad - ١$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A \times B) = A \times \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \times B \quad - ٢$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(A \cdot B) &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(A \cdot B) \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left(A \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot B \right) \\ &= A \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} \cdot B, \quad \text{إلخ} \end{aligned} \quad - ٣$$

تفاضل المتجهات : تتبع القوانين المشابهة لتلك الموجودة في أساسيات التفاضل والتكامل كمثل :

$$dA = dA_1 i + dA_2 j + dA_3 k \quad \text{حيث} \quad A = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad \text{إذا كانت} \quad - ١$$

$$d(A \cdot B) = A \cdot dB + dA \cdot B \quad - ٢$$

$$d(A \times B) = A \times dB + dA \times B \quad - ٣$$

$$\text{إلخ} \quad dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz \quad \text{حيث} \quad A = A(x, y, z), \quad \text{إذا كانت} \quad - ٤$$

التفاضليات الهندسية : تشمل دراسة منحنيات الفراغ والأسطح . إذا كان C منحنى فراغ معروف بالالة $r(s)$

إذن فقد رأينا أن $\frac{dr}{ds}$ هو متجه في اتجاه المماس للمنحنى C . إذا كان البعد s قد أعطى كطول القوس s مقاساً من نقطة ثابتة على C إذن $\frac{dr}{ds}$ هي وحدة المتجه المماس للمنحنى C

ويزنر لما بالرمز T (شكل ٣-٢) الممثل على منته T تتغير بالنسبة

إلى s هو مقياس الانحناء للمنحنى C ومعطى بواسطة $\frac{dT}{ds}$ اتجاهه

$\frac{dT}{ds}$ عند أي نقطة معينة على C يكون عمودياً على المنحنى عند

نقطة النقطة (مسألة ٩) . إذا كانت N وحدة متجه في هذا الاتجاه

العمودي ، تسمى العمود الأمامي للمنحنى إذن أنظر معادلة ٢٤ حيث

K سميت إنحناء C عند نقطة معينة . الكمية $\rho = 1/K$ تسمى نصف

قطر الانحناء .



شكل ٣-٢

وحدة المتجه B العمودي على المستوى T, N بحيث $B = T \times N$ تسمى ثنائى المتجه للمنحنى . ولعل أن اتجاهات

T, N, B من وضع الاتجاه الأيمن لنظام الإحداثيات المتصلة عند أي نقطة معينة للمنحنى C . هذا النظام للإحداثيات

يسمى نظام ثلاثى السطوح . عندما تتغير s يتحرك نظام الإحداثيات ويعرف بأنه ثلاثى سطوح متحرك .

مجموعة خلاطات تتضمن مشتقات المتجهات الأساسية T, N, B تُعرف بمجموعة أربا معينة فرنت سيرت ومطاه كآيل :

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa T, \quad \frac{dB}{ds} = -\tau N$$

حيث τ جدى ونسمى الاتجاه . الكمية $\frac{1}{\tau} = \theta$ تسمى نصف قطر الاتجاه .

مستوى الشام (مستوى المماس) المماس عند النقطة P على المستوى المماس للمماس العمود الأساسى عند P . المستوى العمودى هو مستوى مار بالنقطة P وعمودى على المماس . المستوى المماس هو مستوى مار بالنقطة P وعمودى على العمود الأساسى .

الميكانيكا : وتشمل دائماً دراسة حركة الأجسام على المنحنيات . ونسمى هذه الدراسة كينماتيكا أو علم الحركة المجرى . في هذا الخصوص يمكن أن يكون لبعض النتائج التفصيلات الهندسية قيمة

دراسة القوى على الأجسام المتحركة أخذت في الاعتبار في الميكانيكا . أساسيات هذه الدراسة هو قانون نيوتن الشهير والذي ينص على أنه إذا كانت \mathbf{F} هي القوى الفعلية المؤثرة على جسم كتلته m ويتحرك بسرعة \mathbf{v} فإن

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

حيث $m\mathbf{v}$ هي كمية التحرك للجسم . إذا كانت m ثابتة فإن هذا يصبح $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ حيث \mathbf{v} هي مجلة الجـ

مسائل محلولة

١ - إذا كانت $\mathbf{R}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$ حيث x, y, z هي دوال قابلة للتفاضل لعدد u . أثبت أن

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{du} &= \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{R}}{du} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(u+\Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{[x(u+\Delta u)\mathbf{i} + y(u+\Delta u)\mathbf{j} + z(u+\Delta u)\mathbf{k}] - [x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}]}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u} \mathbf{i} + \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u} \mathbf{j} + \frac{z(u+\Delta u) - z(u)}{\Delta u} \mathbf{k} \\ &= \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \text{ (ب) } \frac{d\mathbf{R}}{dt} \text{ (أ) } \mathbf{R} = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \text{ محلي } \mathbf{v}$$

$$\left| \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right| \text{ (د) } \left| \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right| \text{ (ج)}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t) \mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\cos t) \mathbf{j} + \frac{d}{dt}(t) \mathbf{k} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (أ)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(\cos t) \mathbf{i} - \frac{d}{dt}(\sin t) \mathbf{j} + \frac{d}{dt}(1) \mathbf{k} = -\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} \quad (ب)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right| = \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \quad (ج)$$

$$\left| \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = 1 \quad (د)$$

٢ - جسم يتحرك على منحنى معادلاته البارامترية هي $x = e^{-t}$, $y = 2 \cos 3t$, $z = 2 \sin 3t$ حيث t هو الزمن
(أ) احسب سرعته وعجلته عند أي زمن.
(ب) أوجد مقادير السرعة والعجلة عند $t = 0$.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = e^{-t}\mathbf{i} + 2\cos 3t \mathbf{j} + 2\sin 3t \mathbf{k} \text{ المتجه الموضعي } \mathbf{r} \text{ للجسم هو } \quad (أ)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -e^{-t}\mathbf{i} - 6\sin 3t \mathbf{j} + 6\cos 3t \mathbf{k} \text{ إذن السرعة هي}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e^{-t}\mathbf{i} - 18\cos 3t \mathbf{j} - 18\sin 3t \mathbf{k}$$

$$t = 0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{k}, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i} - 18\mathbf{j} \quad (ب) \text{ عندما}$$

$$\sqrt{(-1)^2 + (6)^2} = \sqrt{37} \text{ تكون } t = 0 \text{ مقدار السرعة عندما}$$

$$\sqrt{(1)^2 + (-18)^2} = \sqrt{325} \text{ تكون } t = 0 \text{ مقدار العجلة عندما}$$

٤ - يتحرك جسم على منحنى $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$ حيث t هو الزمن. أوجد مركبات السرعة والعجلة عند الزمن $t = 1$ في الاتجاه $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [2t^2 \mathbf{i} + (t^2 - 4t) \mathbf{j} + (3t - 5) \mathbf{k}] \text{ السرعة}$$

$$= 4t \mathbf{i} + (2t - 4) \mathbf{j} + 3 \mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ at } t = 1$$

$$\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ وحدة المتجه في الاتجاه } \frac{\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2}} = \frac{\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{14}}$$

إذن مركبة السرعة في الاتجاه المحلي هو

$$\frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{\sqrt{14}} = \frac{(4)(1) + (-2)(-3) + (3)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

$$= \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{ds} [4s(1 + (2s-4)j + 2k)] = 4i + 2j + 0k \quad \text{المجلة}$$

إذن مركبة المجلة في الاتجاه المماس هي

$$\frac{(4i + 2j + 0k) \cdot (1 + (2s-4)j + 2k)}{\sqrt{14}} = \frac{(4)(1) + (2)(-3) + (0)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{14}} = \frac{-\sqrt{14}}{7}$$

٥ - متجه C عند المعادلات البارامترية $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ حيث s هو طول قوس المتجه C

المماس من نقطة ثابتة عليه إذا كان π متجه الموضع لأي نقطة على C بين أن $\frac{dr}{ds} ds$ وحدة متجه مماس للمتجه C

$$\pi = x(s), y = y(s), z = z(s) \quad \text{مماس المتجه} \quad \frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}(x i + y j + z k) = \frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k$$

لتبين أن له مقدار الوحدة نتلاحظ أن

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2}} = 1$$

حيث $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ من حساب التفاضل والتكامل

$$\pi = i + j + k, y = 4s - 3, z = 2s^2 - 6s \quad \text{نقطة على المتجه} \quad s = 2$$

(ب) حدد وحدة المماس عند النقطة حيث $s = 2$

(أ) مماس المتجه المتجه عند أي نقطة هو

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds} [(s^2+1)i + (4s-3)j + (2s^2-6s)k] = 2si + 4j + (4s-6)k$$

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = \sqrt{(2s)^2 + (4)^2 + (4s-6)^2} \quad \text{مقدار المتجه هو}$$

$$T = \frac{2si + 4j + (4s-6)k}{\sqrt{(2s)^2 + (4)^2 + (4s-6)^2}} \quad \text{إذن وحدة المتجه المماس المطلوبة هي}$$

$$\left| \frac{dr}{ds} \right| = \frac{ds}{ds}, \quad T = \frac{dr/ds}{ds/ds} = \frac{dr}{ds} \quad \text{تذكر أنه حيث}$$

$$T = \frac{4i + 4j + 2k}{\sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k \quad \text{عند } s=2 \text{ وحدة المتجه المماس تكون}$$

٧ - إذا كان A و B دوال قابلة لتفاضل لعدد ثابت

$$\frac{d}{du} (A \times B) = A \times \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \times B \quad \text{(ب)} \quad \frac{d}{du} (A \cdot B) = A \cdot \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \cdot B \quad \text{(أ)}$$

$$\frac{d}{du} (A \cdot B) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(A + \Delta A) \cdot (B + \Delta B) - A \cdot B}{\Delta u} \quad \text{(أ)}$$

$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot B + \Delta A \cdot \Delta B}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta u} + \frac{\Delta A}{\Delta u} \cdot B + \frac{\Delta A}{\Delta u} \cdot \Delta B = A \cdot \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \cdot B$$

طريقة أخرى :

$$\text{حيث } A = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad B = B_1 i + B_2 j + B_3 k \quad \text{تكون}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (A \cdot B) &= \frac{d}{du} (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) \\ &= (A_1 \frac{dB_1}{du} + A_2 \frac{dB_2}{du} + A_3 \frac{dB_3}{du}) + (\frac{dA_1}{du} B_1 + \frac{dA_2}{du} B_2 + \frac{dA_3}{du} B_3) = A \cdot \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \cdot B \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (A \times B) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(A + \Delta A) \times (B + \Delta B) - A \times B}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{A \times \Delta B + \Delta A \times B + \Delta A \times \Delta B}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} A \times \frac{\Delta B}{\Delta u} + \frac{\Delta A}{\Delta u} \times B + \frac{\Delta A}{\Delta u} \times \Delta B = A \times \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \times B \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$\frac{d}{du} (A \times B) = \frac{d}{du} \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

باستعمال نظرية المتفاضل المحدد . هنا يصبح

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{dA_1}{du} & \frac{dA_2}{du} & \frac{dA_3}{du} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dA_1}{du} & \frac{dA_2}{du} & \frac{dA_3}{du} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = A \times \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \times B$$

$$\text{حيث } B = \sin t i - \cos t j \quad \text{و} \quad A = 5t^2 i + t j - t^3 k \quad \text{إذا كان } -A$$

$$\frac{d}{dt} (A \cdot A) \quad (٢) \quad \frac{d}{dt} (A \times B) \quad (ب) \quad \frac{d}{dt} (A \cdot B) \quad (١)$$

$$\frac{d}{dt} (A \cdot B) = A \cdot \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \cdot B \quad (١)$$

$$\begin{aligned} &= (5t^2 i + t j - t^3 k) \cdot (\cos t i + \sin t j) + (10t i + j - 3t^2 k) \cdot (\sin t i - \cos t j) \\ &= 5t^2 \cos t + t \sin t + 10t \sin t - \cos t = (5t^2 - 1) \cos t + 11t \sin t \end{aligned}$$

طريقة أخرى : $A \cdot B = 5t^2 \sin t - t \cos t$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A \cdot B) &= \frac{d}{dt} (5t^2 \sin t - t \cos t) = 5t^2 \cos t + 10t \sin t + t \sin t - \cos t \\ &= (5t^2 - 1) \cos t + 11t \sin t \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (A \times B) = A \times \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} \quad (ب)$$

$$\begin{aligned}
 &= [i^3 \sin t - i^2 \cos t]j + (5t^2 \sin t - t \cos t)k \\
 &\quad + [-3t^2 \cos t i - 2t^2 \sin t j + (-10t \cos t - \sin t)k] \\
 &= (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)i - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)j + (5t^2 \sin t - \sin t - 11t \cos t)k
 \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = -t^3 \cos t i - t^3 \sin t j + (-5t^2 \cos t - t \sin t)k \\
 \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)i - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)j + (5t^2 \sin t - 11t \cos t - \sin t)k \\
 \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad (\text{ج}) \\
 &= 2(5t^2 i + t j - t^3 k) \cdot (10t i + j - 3t^2 k) = 100t^3 + 2t + 6t^5
 \end{aligned}$$

طريقة أخرى

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= (5t^2)^2 + (t)^2 + (-t^3)^2 = 25t^4 + t^2 + t^6 \\
 \frac{d}{dt}(25t^4 + t^2 + t^6) &= 100t^3 + 2t + 6t^5. \\
 \text{٩- إذا كان } \mathbf{A} \text{ ذا مقدار ثابت بين } \mathbf{A} \text{ و } \frac{d\mathbf{A}}{dt} \text{ يكونان متعامدين بفرض } \left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| \neq 0.
 \end{aligned}$$

حيث $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \text{constant}$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \quad \text{حيث}$$

$$\left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| \neq 0. \quad \text{باعتبار } \frac{d\mathbf{A}}{dt} \text{ على } \mathbf{A} \text{ يكون عمودياً على } \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

$$\text{١٠- أثبت } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad \text{حيث } \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \text{ دوال قابلة}$$

لتفاضل العدد m من المتجهات (أ) و (ب)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\
 &= \mathbf{A} \cdot \left[\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} \right] + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\
 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}
 \end{aligned}$$

١١- أحسب

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2})$$

من المسألة (١٠)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}) &= \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + \mathbf{v} \cdot \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \\ &= \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} + 0 + 0 = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \end{aligned}$$

١٧ - جسم يتحرك بحيث أن الشبه الموضعي له يحل بالمعادلة $\mathbf{r} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}$ حيث ω ثابت بين أن

(أ) السرعة \mathbf{v} للجسم عمودية على \mathbf{r} (ب) المسجلة \mathbf{a} متجهة نحو الأصل ولها مقدار يتناسب مع المسافة من الأصل
(ج) $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ تساوي متجهاً ثابتاً .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j} \quad (1)$$

هكذا

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] \cdot [-\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j}] \\ &= (\cos \omega t)(-\omega \sin \omega t) + (\sin \omega t)(\omega \cos \omega t) = 0 \end{aligned}$$

و \mathbf{r} و \mathbf{v} متعامدان

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} \quad (ب) \\ &= -\omega^2 [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] = -\omega^2 \mathbf{r} \end{aligned}$$

حينئذ تكون المسجلة عكس اتجاه \mathbf{r} أي أنها متجهة نحو الأصل . ومقدارها يتناسب مع $|\mathbf{r}|$ والى هي المسافة من نقطة الأصل .

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] \times [-\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j}] \quad (ج)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \mathbf{k} = \omega \mathbf{k}, \text{ a constant vector.}$$

نبدأ بالحركة لهذا الجسم المتحرك على محيط دائرة بسرعة زاوية ثابتة ω . المسجلة متجه نحو مركز الدائرة وتكون هي مسجلة الجذب المركزي (المسجلة الحافظة المركزية) .

$$\mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \times \mathbf{B} = \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B})$$

١٧ - برهن

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}) - \frac{d}{dt}(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B})$$

$$= \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} - [\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \times \mathbf{B}] = \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \times \mathbf{B}$$

١٤ - من أن

$$A \cdot \frac{dA}{dt} = A \frac{dA}{dt}$$

ليكن

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \quad \text{إذن} \quad A = A_1i + A_2j + A_3k, \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{-1/2} (2A_1 \frac{dA_1}{dt} + 2A_2 \frac{dA_2}{dt} + 2A_3 \frac{dA_3}{dt}) \\ &= \frac{A_1 \frac{dA_1}{dt} + A_2 \frac{dA_2}{dt} + A_3 \frac{dA_3}{dt}}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}} = \frac{A \cdot \frac{dA}{dt}}{A}, \quad \text{i.e.} \quad A \frac{dA}{dt} = A \cdot \frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

حيث

$$\begin{aligned} A \cdot A &= A^2, \quad \frac{d}{dt}(A \cdot A) = \frac{d}{dt}(A^2), \\ \frac{d}{dt}(A \cdot A) &= A \cdot \frac{dA}{dt} + \frac{dA}{dt} \cdot A = 2A \cdot \frac{dA}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt}(A^2) = 2A \frac{dA}{dt} \end{aligned}$$

حيث

$$2A \cdot \frac{dA}{dt} = 2A \frac{dA}{dt} \quad \text{or} \quad A \cdot \frac{dA}{dt} = A \frac{dA}{dt}$$

تذكر أنه إذا كانت A متجهًا ثابتًا $\Rightarrow A \cdot dA/dt = 0$ كما في المثال ٩

١٥ - إذا كان

$$A = (2x^2y - z^2)i + (e^{xy} - y \sin x)j + (\pi^2 \cos y)k$$

أوجد

$$\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - x^2)j + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} - y \sin x)j + \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos y)k$$

$$= (4xy - 2x)j + (ye^{xy} - y \cos x)j + 2x \cos y k$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - x^2)j + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} - y \sin x)j + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cos y)k$$

$$= 2x^2j + (xe^{xy} - \sin x)j - x^2 \sin y k$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy - 2x)j + \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - y \cos x)j + \frac{\partial}{\partial x}(2x \cos y)k$$

$$= (4y - 2)j + (y^2 e^{xy} + y \sin x)j + 2 \cos y k$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2)j + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} - \sin x)j - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \sin y)k$$

$$= 0 + x^2 e^{xy}j - x^2 \cos y k = x^2 e^{xy}j - x^2 \cos y k$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2)j + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} - \sin x)j - \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin y)k$$

$$= 4xj + (ye^{xy} + e^{xy} - \cos x)j - 2x \sin y k$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 2x)j + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - y \cos x)j + \frac{\partial}{\partial y}(2x \cos y)k$$

$$= 4xj + (xe^{xy} + e^{xy} - \cos x)j - 2x \sin y k$$

نذكر أن $\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$ أي أن رتبة التفاضل غير ذات موضوع هذا عموماً صحيح إذا كان

التفاضل المتجه من الرتبة الثانية مستمر قيمته A على الأقل

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\phi A) \text{ أو } A = xxj - xy^2j + yz^2k, \quad \phi(x, y, z) = xyz \text{ إذا كان } (2, -1, 1)$$

منه المنطقة

$$\phi A = (xy^2z)(xxj - xy^2j + yz^2k) = x^2y^2z^2j - x^2y^4j + xy^3z^2k$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi A) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z^2j - x^2y^4j + xy^3z^2k) = 2xy^2z^2j - 2xy^4j + y^3z^2k$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x}(\phi A) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2z^2j - 2xy^4j + y^3z^2k) = 4y^2z^2j - 4y^4j + y^3z^2k$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\phi A) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy^2z^2j - 2xy^4j + y^3z^2k) = 4y^2z^2j - 2y^4j$$

$$4(-1)^2(1)j - 2(-1)^4j = 4j - 2j = 2j \text{ حيث } x=2, y=-1, z=1 \text{ إذا كانت}$$

١٧ - ليكن W متجهاً على x, y, z حيث x, y, z متجه على t . أثبت أن

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

تحت افتراض ملائم لتقابلية التفاضل

$$F = F_1(x, y, z, t) \mathbf{i} + F_2(x, y, z, t) \mathbf{j} + F_3(x, y, z, t) \mathbf{k}$$

إذن

$$\begin{aligned} dF &= dF_1 \mathbf{i} + dF_2 \mathbf{j} + dF_3 \mathbf{k} \\ &= \left[\frac{\partial F_1}{\partial t} dt + \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial t} dt + \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial F_3}{\partial t} dt + \frac{\partial F_3}{\partial x} dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right] \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial t} \mathbf{k} \right) dt + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \mathbf{k} \right) dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \mathbf{k} \right) dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \mathbf{k} \right) dz \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \end{aligned}$$

لذلك

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

التفاضل الاتجاهي :

$$\frac{dN}{ds} = \tau B - \kappa T, (ج) \quad \frac{dB}{ds} = -\tau N, (ب) \quad \frac{dT}{ds} = \kappa N, (أ)$$

(أ) حيث $T \cdot T = 1$ ومن مسألة ٩ أن $T \cdot dT/ds = 0$ أي أن dT/ds عمودية على T .

إذا كانت N وحدة متجه في اتجاه $dT/ds = \kappa N$. إذن dT/ds تسمى N العمود الأساسي الاتجاه $\rho = 1/\kappa$ نصف قطر الانحناء.

$$\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= T \times \frac{dN}{ds} + \frac{dT}{ds} \times N = T \times \frac{dN}{ds} + \kappa N \times N = T \times \frac{dN}{ds} \quad (\text{ب}) \text{ ليكن } B = T \times N \text{ بحيث أن} \\ \text{إذن } T \cdot \frac{dB}{ds} &= T \cdot T \times \frac{dN}{ds} = 0 \quad \text{حيث تكون } T \text{ عمودية على } dB/ds. \end{aligned}$$

لكن من $B \cdot B = 1$ يستتبع أن $B \cdot dB/ds = 0$ (مسألة ٩) بحيث أن dB/ds تكون عمودية على B وذلك في المستوى T, N .

وبما أن dB/ds موجودة في المستوى المحتوي على كل من T, N وعمودية على T فلا بد أن يكون موازياً-لقطعته N إذن $dB/ds = -\tau N$ وتسمى B ثنائى الاعتماد τ الالتواء $\sigma = 1/\tau$ نصف قطر الالتواء.

(ج) حيث T, N, B تكون منظومة عيى وكذلك N, B, T أى أن $N = B \times T$

$$\frac{dN}{ds} = B \times \frac{dT}{ds} + \frac{dB}{ds} \times T = B \times \kappa N - \tau N \times T = -\kappa T + \tau B = \tau B - \kappa T$$

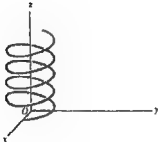
بحسب

١٩ - نعطى منحنى القزراع $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$

ثم أوجد (١) وحدة الأساس T (ب) السور الأساسي N

والانحناء K ونصف قطر الانحناء ρ (ج) ثنائى التواء B

والانواء τ ونصف قطر الانواء σ .



شكل ٣-٤

منحنى التواء عبارة عن لولب دائرى (شكل ٣-٤)

حيث $t = x/4$ والمنحنى له المعادلات $x = 3 \cos (x/4)$

$y = 3 \sin (x/4)$ وبالتالى فإنها تقع على الأسطوانة

$$x^2 + y^2 = 9$$

(١) متجه الموضع لأى نقطة على المنحنى هو

$$r = 3 \cos t i + 3 \sin t j + 4t k$$

$$\frac{dr}{dt} = -3 \sin t i + 3 \cos t j + 4k$$

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 4^2} = 5 \quad \text{إذن}$$

$$T = \frac{dr}{ds} = \frac{dq/dt}{ds/dt} = -\frac{3}{5} \sin t i + \frac{3}{5} \cos t j + \frac{4}{5} k \quad \text{وبالتالى}$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d}{ds} \left(-\frac{3}{5} \sin t i + \frac{3}{5} \cos t j + \frac{4}{5} k \right) = -\frac{3}{5} \cos t i - \frac{3}{5} \sin t j \quad (٢)$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{ds/dt} = -\frac{3}{25} \cos t i - \frac{3}{25} \sin t j$$

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad \left| \frac{dT}{ds} \right| = |\kappa| |N| = \kappa \quad \text{حيث } \kappa \geq 0$$

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25} \cos t \right)^2 + \left(-\frac{3}{25} \sin t \right)^2} = \frac{3}{25} \quad \text{و} \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{3} \quad \text{إذن}$$

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} = -\cos t i - \sin t j, \quad \text{يمكن الحصول على } dT/ds = \kappa N \text{ من}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{4}{5} \sin t & \frac{3}{5} \cos t & \frac{4}{5} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5} \sin t \mathbf{i} - \frac{4}{5} \cos t \mathbf{j} + \frac{3}{5} \mathbf{k} \quad (٢)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{4}{5} \cos t \mathbf{i} + \frac{4}{5} \sin t \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{4}{25} \cos t \mathbf{i} + \frac{4}{25} \sin t \mathbf{j}$$

$$-\tau \mathbf{N} = -\tau (-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) = \frac{4}{25} \cos t \mathbf{i} + \frac{4}{25} \sin t \mathbf{j} \quad \text{or} \quad \tau = \frac{4}{25} \quad \text{and} \quad \sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}$$

٢٠- أثبت أن نصف قطر الانحناء المنحني بالمعادلات البارامترية $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ يعطى بالمعادلة

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

المتجه الموضعي لأي نقطة على المنحني هو $\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k} \quad \text{إذن}$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2} \quad \text{حيث يكون} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

والنتيجة تأت حيث $\rho = 1/\kappa$

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\tau}{\rho^3} \quad \text{٢١- بين أن}$$

$$\frac{dx}{ds} = \mathbf{T} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} = \kappa \mathbf{N} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = \kappa \left(\mathbf{T} \mathbf{B} - \kappa \mathbf{T} \right) \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = \kappa \mathbf{T} \mathbf{B} - \kappa^2 \mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds} \mathbf{N}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} &= \mathbf{T} \cdot \kappa \mathbf{N} \times (\kappa \mathbf{T} \mathbf{B} - \kappa^2 \mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds} \mathbf{N}) \\ &= \mathbf{T} \cdot (\kappa^2 \mathbf{T} \mathbf{N} \times \mathbf{B} - \kappa^3 \mathbf{N} \times \mathbf{T} + \kappa \frac{d\kappa}{ds} \mathbf{N} \times \mathbf{N}) = \mathbf{T} \cdot (\kappa^2 \mathbf{T} \mathbf{T} + \kappa^3 \mathbf{B}) = \kappa^2 \tau = \frac{\tau}{\rho^2} \end{aligned}$$

يمكن كتابة النتيجة كما يلي

$$\tau = \left[(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2 \right]^{-1/2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

حيث أن الشرط فوق الحروف تبين المتطابقات بالنسبة إلى s وباستخدام النتيجة المسماة ٢٠

٢٢- أعطيت منحنى الفراغ $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3} t^3$ أوجد (١) الانحناء κ (ب) الانحدار.

$$\mathbf{r} = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \frac{2}{3} t^3 \mathbf{k} \quad (١) \quad \text{المتجه الموضعي هو}$$

$$\frac{dx}{dt} = i + 2xj + 2z^2k \quad \text{إذن}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dx}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = 1 + 2z^2$$

$$T = \frac{dx}{ds} = \frac{dx/dt}{ds/dt} = \frac{i + 2xj + 2z^2k}{1 + 2z^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(1 + 2z^2)(2i + 4zk) - (i + 2xj + 2z^2k)(4z)}{(1 + 2z^2)^2} = \frac{-4zi + (2 - 4z^2)j + 4zk}{(1 + 2z^2)^2}$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{ds/dt} = \frac{-4zi + (2 - 4z^2)j + 4zk}{(1 + 2z^2)^3} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad \kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \frac{\sqrt{(-4z)^2 + (2 - 4z^2)^2 + (4z)^2}}{(1 + 2z^2)^3} = \frac{2}{(1 + 2z^2)^3} \quad \text{حيث}$$

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} = \frac{-2zi + (1 - 2z^2)j + 2zk}{1 + 2z^2} \quad \text{(ب) من (1)}$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{1+2z^2} & \frac{2x}{1+2z^2} & \frac{2z^2}{1+2z^2} \\ \frac{-2z}{1+2z^2} & \frac{1-2z^2}{1+2z^2} & \frac{2z}{1+2z^2} \end{vmatrix} = \frac{2z^2i - 2xj + k}{1+2z^2} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dB/dt}{ds/dt} = \frac{4zi + (4z^2 - 2)j - 4zk}{(1 + 2z^2)^2}, \quad \frac{dB}{dt} = \frac{4zi + (4z^2 - 2)j - 4zk}{(1 + 2z^2)^2} \quad \text{والآن}$$

$$\tau = \frac{2}{(1 + 2z^2)^2} \quad \text{حيث} \quad \frac{dB}{ds} = -\tau N \quad \text{حيث} \quad -\tau N = -\tau \left[\frac{-2zi + (1 - 2z^2)j + 2zk}{1 + 2z^2} \right] \quad \text{أيضا}$$

لاحظ أن $\kappa = \tau$ هذا المعنى

٢٢- أوجد معادلات في صيغة المتجه ولاتجاه الأبعاد الثلاث: (1) للمماس (ب) للعمود الأساسي (1) ثنائي التماس

المعنى مسألة ٢٢ من الثالثة إلى معادلة 1: ٢

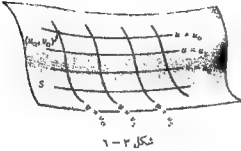
ليكن المتجهات B, T, N تمثل المماسي والعمود الأساسي وثلاث المتجهات عند نقطة المطلوبة.

إذن من مسألة ٢٢

$$T_0 = \frac{1 + 2i + 2k}{3}, \quad N_0 = \frac{-2i - j + 2k}{3}, \quad B_0 = \frac{2i - 2j + k}{3}$$

(ب) أوجد الوحدة المماسية للسطح الآتي حيث $a > 0$

$$r = a \cos u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}$$



شكل ١-٢

(١) إذا فرض أن u لها قيمة ثابتة ولتكن u_0

إذن $r = r(u_0, v)$ تمثل منحنى على

يسمى بالمماس له $u = u_0$. بالمثل $v = v_0$

تعرف منحنى آخر $r = r(u, v_0)$ عندما

تغير u عند $r = r(u, v_0)$ تمثل منحنى

يتحرك في الفراغ ويولد سطح S . إذن

$r = r(u, v)$ تمثل السطح المتولد شكل ١-٣

المنحنيات و $u = u_0, u = u_1, \dots$ تمثل منحنيات محددة على السطح بالمثل $v = v_0, v = v_1, \dots$

تمثل منحنيات على السطح.

بتحديد قيم معينة لكل من (u, v) نحصل على نقطة على السطح. وبالتالي المنحنيات $u = u_0, v = v_0$

على سبيل المثال تتقاطع وتحدد النقطة (u_0, v_0) على السطح. نحن نتكلم عن زوج إحداثيات (u, v) كمتريف لإحداثيات

منحنى الإنحلال على السطح. إذا كانت كل

المنحنيات $u = \text{ثابت}$ ، $v = \text{ثابت}$ متعامدة عند

كل نقطة التقاطع فيقال أن منظومة إحداثيات

منحنى الإنحلال متعامدة.

(ب) اعتبر نقطة P على الإحداثيات (u_0, v_0) على السطح

S كما هو مبين بشكل ١-٢ المتجه $\partial r / \partial u$

عند P يمكن الحصول عليه بتفاضل r بالنسبة

إلى u مع الاحتفاظ $v = v_0 = \text{ثابت}$ عند

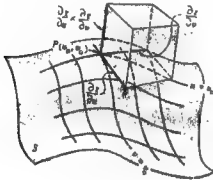
من نظرية منحنى الفراغ نجد أن $\partial r / \partial u$ عند

P تمثل متجه المماس المنحني $u = u_0$ عند P

(شكل ١-٢) بالمثل $\partial r / \partial v$ عند P تمثل متجه المماس المنحني $v = v_0$ ثابت u حيث $\partial r / \partial u \cdot \partial r / \partial v$ تمثل

المتجهات عند P عمدة المنحنيات الواقعة على السطح S عند P وبالتالي فإن هذه المتجهات تكون عمدة السطح عند P وبالتالي

يستنتج أن $dr/du \times dr/dv$ يكون هو المتجه العمودى على السطح S عند P



شكل ١-٣

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} &= -a \sin u \sin v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} \\ \frac{\partial r}{\partial v} &= a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} - a \sin v \mathbf{k} \end{aligned} \quad (٣)$$

إذن

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin u \sin v & a \cos u \sin v & 0 \\ a \cos u \cos v & a \sin u \cos v & -a \sin v \end{vmatrix}$$

$$= -a^2 \cos u \sin^2 v i - a^2 \sin u \sin^2 v j - a^2 \sin v \cos v k$$

تمثل متجهاً مماساً على السطح عند أي نقطة (u, v)

وحدة المتجه المماس يمكن الحصول عليها بقسمتها بمقدارها $dv/du \times dv/dv$

المعطى بالمعادلة

$$\sqrt{a^4 \cos^2 u \sin^4 v + a^4 \sin^2 u \sin^4 v + a^4 \sin^2 v \cos^2 v}$$

$$= \sqrt{a^4 (\cos^2 u + \sin^2 u) \sin^4 v + a^4 \sin^2 v \cos^2 v}$$

$$= \sqrt{a^4 \sin^2 v (\sin^2 v + \cos^2 v)} = \begin{cases} a^2 \sin v & \text{if } \sin v > 0 \\ -a^2 \sin v & \text{if } \sin v < 0 \end{cases}$$

إذن يوجد وحدتان مماسيتان

$$\pm (\cos u \sin v i + \sin u \sin v j + \cos v k) = \pm n$$

يجب أن يلاحظ أن السطح المعطى يعرف بالمعادلة $x = a \cos u \sin v, y = a \sin u \sin v, z = a \cos v$ أي أنها

نرى أن $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ والتي تمثل معادلة كرة نصف قطرها a حيث $r = a$ ومنها نجد أن

$$n = \cos u \sin v i + \sin u \sin v j + \cos v k$$

هي وحدة المتجه المماسي المرسوم لخارج الكرة عند النقطة (u, v)

٧٦- أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $z = x^2 + y^2$ عند النقطة $(1, -1, 2)$.

ولكن $z = x^2 + y^2$ ، $x = u, y = v, z = w^2 + v^2$ هي معادلات بارامترية للسطح. معطى الموضع لأي نقطة على السطح هو

$$r = u i + v j + (u^2 + v^2) k$$

$$\text{إذن } \frac{\partial f}{\partial u} = i + 2u k = i + 2k, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = j + 2v k = j - 2k \quad \text{عند النقطة } (1, -1, 2) \text{ حيث } n = 1$$

$$v = -1$$

مسألة ٧٧ المتجه المماسي n على السطح عند هذه النقطة هو

$$n = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = (i + 2k) \times (j - 2k) = -2i + 2j + k$$

متجه الموضع المتعلق (1, -1, 2) هو $R_0 = i - j + 2k$

متجه الموضع لأي نقطة على المستوى هو

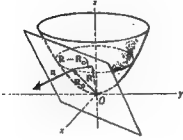
$$R = xi + yj + zk$$

إذن من (شكل ٢-٨) تكون عمودية على $R - R_0$

وتكون المعادلة المطلوبة المستوى هي $(R - R_0) \cdot n = 0$

$$[(xi + yj + zk) - (i - j + 2k)] \cdot [-2i + 2j + k] = 0$$

$$\text{أو أن } -2(x-1) + 2(y+1) + (z-2) = 0 \text{ or } 2x - 2y - z = 2$$



شكل ٢-٨

ميكانيكا :

٢٧- بين أن المجلة n جسم يتحرك على منحنى فرائى بسرعة v يسطى بالمعادلة

$$n = \frac{dv}{ds} T + \frac{v^2}{\rho} N$$

حيث T هي وحدة متجه المماس لمنحنى الفراغ و N هي وحدة المتجه العمود الأساس لهذا المنحنى و ρ هو نصف قطر

الانحناء . السرعة $v =$ قيمة v مضروب في وحدة متجه المماس T

$$\text{أو } v = v T$$

$$n = \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds}(vT) = \frac{dv}{ds} T + v \frac{dT}{ds}$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa N \frac{ds}{dt} = \kappa v N = \frac{vN}{\rho} \quad (\text{مسألة ١٨-1})$$

$$n = \frac{dv}{ds} T + v \left(\frac{vN}{\rho} \right) = \frac{dv}{ds} T + \frac{v^2}{\rho} N \quad \text{إذن}$$

هذا يبين أن مركبة المجلة dv/ds تكون في اتجاه المماس لطريق و v^2/ρ في اتجاه العمود الأساسى لطريق . وهذه المجلة

تسمى المجلة المحافظة المركزية كسالة خاصة من هذه المسألة أنظر المسألة ١٢ .

٢٨- إذا كان r متجه الموضع لجسم كتلة m بالنسبة إلى نقطة O و H هي الفترة الخارجية على الجسم إذن

$$r \times F = M \quad \text{حيث } F \text{ هو عزم القوة } F \text{ حول } O \text{ بين أن } M = dH/dt \text{ حيث } H = r \times mv \text{ و } v \text{ هي سرعة الجسم .}$$

$$n = r \times F = r \times \frac{d}{dt}(mv)$$

$$\frac{d}{dt}(r \times mv) = r \times \frac{d}{dt}(mv) + \frac{dr}{dt} \times mv$$

$$= r \times \frac{d}{dt}(mv) + v \times mv = r \times \frac{d}{dt}(mv) + 0$$

$$\mathbf{H} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad \text{أي أن}$$

يلاحظ أن النتيجة صحيحة سواء كانت m ثابتة أم لا. نسي \mathbf{H} الزخم الزاوي. النتيجة.

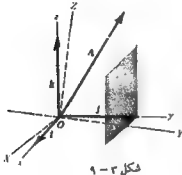
يبين أن الزخم يساوى معدل تغير كمية التمدد الزاوي.

هذه النتيجة من السهل التوسع فيها لتشمل نظام يتكون من N من الأجسام لها الكتل m_1, m_2, \dots, m_N ولها

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k \quad \text{ولها الحالتان} \quad \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N \quad \text{وقوى خارجية}$$

$$\text{وحده هي كمية التمدد الزاوية الكلية} \quad \mathbf{H} = \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k \quad \text{هو الزخم الكلي والنتيجة هي} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad \text{كما}$$

حصلنا عليها سابقاً.



شكل ٣-٩

٣٩ - مشاهد واقف عند نقطة ثابتة بالنسبة لنظام الإحداثيات x, y, z .

التي له نقطة أصل O كما في شكل ٣-٩ لاحظ المتجه

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k} \quad \text{أحسب مشتقه بالنسبة}$$

الزمن ولكن $\frac{dA_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt} \mathbf{k}$ أميراً وجد

أنه هو ونظام إحداثيات يدوران فعلياً بالنسبة إلى نظام

الإحداثيات XYZ المتحركة ثابتاً في الفراغ والذي له نقطة

أصل عند O .

فأما هي المشتقة بالنسبة للزمن المتجه \mathbf{A} الملاحظ للثابت لنظام الإحداثيات XYZ ؟

$$(1) \quad \text{إذا كان} \quad \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_F \quad \text{نصرف على الترتيب المشتقات الزمنية للمتجه} \quad \mathbf{A} \quad \text{بالنسبة لنظام ثابت}$$

ونظام متحرك. بين أنه توجد كمية متجهة بحيث أن

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

(ب) ليكن D_M و D_F ومزمن لمعامل المشتقات الزمنية في نظام ثابت ومتحرك على الترتيب. أثبت المعامل المكافئ.

$$D_F = D_M + \boldsymbol{\omega} \times$$

(1) المشاهد الثابت وحدة المتجهات \mathbf{k} إلى أنه يتغير فعلياً مع الزمن. بالتالي فإن هذا الملاحظ لابد له من حساب المشتقة

الزمنية للمتجه \mathbf{A}

$$(1) \quad \text{أي أن} \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt} \mathbf{k} + A_1 \frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2 \frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3 \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_f = \left. \frac{dA}{dt} \right|_g + i_1 \frac{dj}{dt} + A_2 \frac{dj}{dt} + A_3 \frac{dk}{dt} \quad (r)$$

حيث i هي وحدة متجه و dh/dt عزمه على i (مسألة ٩) ولابد أن تقع في المستوى j و k إذن

$$\frac{dj}{dt} = \alpha_1 i + \alpha_2 k \quad (r)$$

$$\frac{dj}{dt} = \alpha_2 k + \alpha_3 i \quad (t) \quad \text{بالمثل}$$

$$\frac{dk}{dt} = \alpha_3 i + \alpha_4 j \quad (o)$$

من $0 = j \cdot j$ يلزم التفاضل إلى $i \cdot \frac{dj}{dt} + \frac{dj}{dt} \cdot j = 0$ ولكن $i \cdot \frac{dj}{dt} = \alpha_1$ من $\frac{dj}{dt} \cdot j = \alpha_1$ و (t) من

$$\alpha_3 = -\alpha_1 \quad \text{من } (r)$$

بالمثل من $j \cdot k = 0$, $j \cdot \frac{dk}{dt} + \frac{dk}{dt} \cdot j = 0$ من $j \cdot k = 0$, $\alpha_4 = -\alpha_2$ و $i \cdot k = 0$, $i \cdot \frac{dk}{dt} + \frac{dk}{dt} \cdot i = 0$ من $i \cdot k = 0$, $\alpha_4 = -\alpha_2$ و

$$\frac{di}{dt} = \alpha_1 j + \alpha_2 k, \quad \frac{dj}{dt} = \alpha_2 k - \alpha_1 i, \quad \frac{dk}{dt} = -\alpha_3 i - \alpha_4 j$$

$$A_1 \frac{di}{dt} + A_2 \frac{dj}{dt} + A_3 \frac{dk}{dt} = (-\alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_3) i + (\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_3) j + (\alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2) k$$

التي يمكن كتابتها في الصورة

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

إذا اخترنا $\omega_1 = \alpha_1$, $\omega_2 = -\alpha_2$, $\omega_3 = \alpha_3$ يصبح المحدد

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \omega \times A$$

حيث $\omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k$ هي متجه السرعة الزاوية للنظام المتحرك بالنسبة لنظام ثابت

$$(ب) \text{ بالتعريف } D_f A = \left. \frac{dA}{dt} \right|_f = \text{المشتقة في نظام ثابت}$$

$$D_m A = \left. \frac{dA}{dt} \right|_m = \text{المشتقة في نظام متحرك}$$

$$D_f A = D_m A + \omega \times A = (D_m + \omega \times) A \quad (أ)$$

وهذا يبين تكافؤ العاملَيْن المؤثرَيْن $D_m + \omega \times$ و D_f

٣٠ - أوجد (أ) السرعة (ب) المجلة لجسم متحرك كما يراه اثنان من المشاهدين في المسألة ٢٩

(أ) ليكن المتجه A في المسألة ٢٩ هو متجه الموضع r لجسم باستخدام رمز العامل المؤثر k في (المسألة ٢٩ - ب) وليكن

$$D_f r = (D_m + \omega \times) r = D_m r + \omega \times r \quad (١)$$

$$\text{لكن } D_f r = v|_f = \text{سرعة الجسم بالنسبة لنظام ثابت}$$

$$D_m r = v|m = \text{سرعة الجسم بالنسبة لنظام متحرك}$$

$$v|_f = v|m + \omega \times r = \text{سرعة النظام المتحرك بالنسبة لنظام ثابت}$$

إذن (١) يمكن أن تكتب على هيئة

$$v|_f = v|m + \omega \times r \quad (٢)$$

أو باستخدام العلامات المقترحة ؟

$$v|_f = v|m + v|m \times r \quad (٣)$$

بلاسط أن دوران الملاحظين الثابت والمتحرك يمكن أن يتبادلا وبالتالي الملاحظ الثابت يمكن أن يفكر في نفسه كمتحرك بالنسبة إلى الآخر . في هذه الحالة لابد من تغيير الرموز السفلية m و f وأيضاً تغيير ω إلى $-\omega$ —

حيث أن المورادف التسي قد عكس . إذا حصل هذا تصبح المعادلة (٢) :

$$v|m = v|_f - \omega \times r \quad \text{أو} \quad v|_f = v|m + \omega \times r$$

هذه النتيجة صحيحة لكل ملاحظ (مشاهد) .

(ب) مجلة الجسم كما سجدعا المشاهدة الثابت منه O هي $D_f(D_f r) = D_f^2 r$. عل D_f في كلا الجانبين المعادلة

(١) واستخدم السبل المؤثر المكافؤ الذي وجد في (المسألة ٢٩ - ب) إذن

$$\begin{aligned} D_f(D_f r) &= D_f(D_n r + \omega \times r) \\ &= (D_n + \omega \times)(D_n r + \omega \times r) \\ &= D_n(D_n r + \omega \times r) + \omega \times (D_n r + \omega \times r) \\ &= D_n^2 r + D_n(\omega \times r) + \omega \times D_n r + \omega \times (\omega \times r) \end{aligned}$$

$$D_f^2 r = D_n^2 r + 2\omega \times D_n r + (D_n \omega) \times r + \omega \times (\omega \times r) \quad \text{أو}$$

$$\begin{aligned} \text{ليكن} \quad a_{D_f} &= D_f^2 r, \quad \text{تساوى عجلة الجسم بالنسبة لنظام ثابت} \\ a_{D_n} &= D_n^2 r, \quad \text{تساوى عجلة الجسم بالنسبة لنظام متحرك} \end{aligned}$$

إذن

$$a_{D_f} = 2\omega \times D_n r + (D_n \omega) \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

تساوى عجلة النظام المتحرك بالنسبة للنظام الثابت .

ونستطيع أن نكتب

$$a_{D_f} = a_{D_n} + a_{n|f}$$

الحالات كثيرة مهمة هي معجزة ثابت . أي أن الدوران يتنازع بسرعة زاوية ثابتة . إذن $D_n \omega = 0$.

$$a_{n|f} = 2\omega \times D_n r + \omega \times (\omega \times r) = 2\omega \times v_n + \omega \times (\omega \times r) \quad \text{و}$$

الكلمة $2\omega \times v_n$ تسمى عجلة كوريولس . وتسمى $\omega \times (\omega \times r)$ العجلة المحافظة المركزية .

قانون نيوتن صالح فقط في نظم القصور الذاتي أي أن النظم الثابتة أو التي تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لنظام ثابت . الأرض ليست بالنسبة لنظام قصور ذاتي وهذا يعصب نتيجة لوجود افتراضات مخالفة الواقع هي قوى ذاتية (كوريولس ...) والبعث التي لابد أن تولد في الاعتبار . إذا كانت كتلة الجسم ثابتة M إذن قانون نيوتن الثاني يصبح

$$M D_n^2 r = F - 2M(\omega \times D_n r) - M[\omega \times (\omega \times r)] \quad (٤)$$

حيث D_n ترمز لكلمة d/dt كما سميت بواسطة المشاهد على الأرض والقوة F هي محصلة كل القوى الحقيقية كما قيست بالمشاهد .

أمر كيتين في الطرف الأيمن (٤) يمكن إهمالها في معظم الحالات ولا يستخدموا في الحياة العملية .

النظرية النسبية لأينشتاين عدلت أو غيرت تغييراً جديراً لمفهوم الحركة المطلقة التي هي مفهوم متضمن مبدأ نيوتن وأدت إلى مراجعة قوانين نيوتن .

مسائل متنوعة

٣١- إذا كان $R = e^{-t} + \ln(t^2 + 1) - \tan t$ أوجد $\left(\frac{d^2 R}{dt^2} \right)$ (ب) $\left(\frac{dR}{dt} \right)$ (أ) عند $t = 0$

الإجابة : (أ) $1 - k$ ، (ب) $2j + i + \sqrt{2}$ ، (د) $\sqrt{5}$

٣٢- أوجد السرعة والمجلة لجسم يتحرك على طول المنحنى $x = 2 \sin 3t$ ، $y = 2 \cos 3t$ ، $z = 8t$ عند أي زمن $t > 0$ أوجد مقدار السرعة والمجلة :

الإجابة :

$\mathbf{v} = 6 \cos 3t \mathbf{i} - 6 \sin 3t \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ ، $\mathbf{a} = -18 \sin 3t \mathbf{i} - 18 \cos 3t \mathbf{j}$ ، $|\mathbf{v}| = 10$ ، $|\mathbf{a}| = 18$

٣٣- أوجد وحدة متجه المماس لأي نقطة على المنحنى $x = a \cos \omega t$ ، $y = a \sin \omega t$ ، $z = bt$ حيث a, b, ω هي ثوابت

الإجابة :

$$\frac{-a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2 \omega^2 + b^2}}$$

٣٤- إذا كان $\mathbf{A} = t^2 \mathbf{i} - t \mathbf{j} + (2t+1)\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = (2t-3)\mathbf{i} + t \mathbf{j} - t\mathbf{k}$ أوجد

$\left(\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}) \right)$ at $t=1$ (د) $\left(\frac{d}{dt} |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \right)$ (ج) $\left(\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \right)$ (ب) $\left(\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \right)$ (أ)

الإجابة : (أ) -6 (ب) $7j + 3k$ (ج) 1

(د) $i + 6j + 2k$

٣٥- إذا كان $\mathbf{A} = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{C} = 2t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} - t\mathbf{k}$ أوجد

$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))$ at $t=0$

الإجابة : $7i + 6j - 6k$

٣٦- أوجد $\left(\frac{d}{ds} (\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds}) - \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} \right)$ إذا كان \mathbf{A} و \mathbf{B} تكونان دوالاً متعامدة في S

الجواب $\mathbf{A} \cdot \frac{d^2 \mathbf{B}}{ds^2} - \frac{d^2 \mathbf{A}}{ds^2} \cdot \mathbf{B}$

٣٧- إذا كان $\mathbf{B}(t) = \sin t + 3e^{-t} \mathbf{j} - 3 \cos t \mathbf{k}$ و $\mathbf{A}(t) = 3t^2 \mathbf{i} - (t+4)\mathbf{j} + (t^2-2t)\mathbf{k}$ أوجد $\left(\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \right)$ at $t=0$

الإجابة : $-30i + 14j + 20k$

٣٨- إذا كان $\frac{d^2 A}{dt^2} = 6x\mathbf{i} - 24x^2\mathbf{j} + 4\sin x\mathbf{k}$ أوجد A المحل بالمعادلة

$$A = (x^3 - x + 2)\mathbf{i} + (1 - 2x^2)\mathbf{j} + (x - 4\sin x)\mathbf{k} \quad \text{الإجابة: } A = 2t + \mathbf{j} \quad \text{و} \quad \frac{dA}{dt} = -1 - 3k \quad \text{at } t=0$$

٣٩- بين أن الحل العام للمعادلة التفاضلية حيث C_1, C_2 متغيرات ثابتة، حل تكون حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

٤٠- بين أن الحل العام للمعادلة التفاضلية هي $\frac{d^2 f}{dt^2} + 2a\frac{df}{dt} + \omega^2 f = 0$ حيث ω و a كميات ثابتة تكون

$$f = e^{-at}(C_1 e^{\sqrt{a^2 - \omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{a^2 - \omega^2}t}) \quad \text{if } a^2 - \omega^2 > 0 \quad (أ)$$

$$f = e^{-at}(C_1 \sin \sqrt{\omega^2 - a^2}t + C_2 \cos \sqrt{\omega^2 - a^2}t) \quad \text{if } a^2 - \omega^2 < 0 \quad (ب)$$

$$f = e^{-at}(C_2 + C_1 t) \quad \text{if } a^2 - \omega^2 = 0. \quad (ج)$$

حيث C_1 و C_2 كميات ثابتة اختيارية

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 4x = 0 \quad (أ) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (ب) \quad \frac{d^2 f}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0 \quad (١)$$

$$f = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \quad (أ) \quad f = e^{-t}(C_1 + C_2 t) \quad (ب) \quad f = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \quad (١) \quad \text{الإجابة:}$$

$$X = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad Y = C_1 \sin t - C_2 \cos t \quad \text{الإجابة: } \frac{dY}{dt} = X, \quad \frac{dX}{dt} = -Y$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \quad \text{أوجد } A = \cos xy\mathbf{i} + (3xy - 2x^2)\mathbf{j} - (3x + 2y)\mathbf{k} \quad \text{إذا كان}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -y \sin xy\mathbf{i} + (3y - 4x)\mathbf{j} - 3k, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -x \sin xy\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - 2k, \quad \text{الجواب:}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy\mathbf{i}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = -(xy \cos xy + \sin xy)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (A \times B) \text{ at } (1, 0, -2): \quad \text{أوجد } A = x^2 yz\mathbf{i} - 2xz^2\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k} \quad \text{و } B = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$$

$$\text{الإجابة: } -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

٤١- إذا كان C_1 و C_2 تكون متجهات ثابتة و λ كمية عددية ثابتة بين أن $\mathbf{u} = e^{-\lambda x}(C_1 \sin \lambda y + C_2 \cos \lambda y)$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية}$$

٤٢- أثبت أن $A = \frac{y_0 e^{i\omega(t - r/c)}}{r}$ حيث \mathbf{r}_0 متجه ثابت و ω و c كميات عددية ثابتة و $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad \text{تحقق المعادلة}$$

هذه النتيجة مهمة في النظرية الكهرومغناطيسية

انتفاصل الهندسي :

٤٧- أوجد (أ) وحدة المس T (ب) الانحناء K (ج) المنحى الأساسى المسمى N (د) ثنائى الاعتماد B (هـ) الالتواء τ

لنحى الفراغ $x = t - t^3/3, y = t^2, z = t + t^3/3$

$$\text{الإجابة : (أ) } T = \frac{(1-t^2)i + 2tj + (1+t^2)k}{\sqrt{2(1+t^2)}} \quad (\text{ب}) \quad K = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$N = -\frac{2t}{1+t^2}i + \frac{1-t^2}{1+t^2}j \quad (\text{ج}) \quad B = \frac{(t^2-1)i - 2tj + (t^2+1)k}{\sqrt{2(1+t^2)}} \quad (\text{د}) \quad \tau = \frac{1}{(1+t^2)^2} \quad (\text{هـ})$$

٤٨- عرف منحنى فراغ بدلالة طول قوس القوس s بالمعادلة

$$x = \arcs \tan s, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \ln(s^2 + 1), \quad z = s - \arcs \tan s$$

أوجد (أ) T (ب) N (ج) B (د) K (هـ) τ (و) σ (ز) ρ (ح) σ

$$\text{الإجابة : (أ) } T = \frac{i + \sqrt{2}sj + s^2k}{s^2+1} \quad (\text{ب}) \quad N = \frac{-\sqrt{2}si + (1-s^2)j + \sqrt{2}s^2k}{s^2+1}$$

$$\sigma = \frac{s^2+1}{\sqrt{2}} \quad (\text{و})$$

$$\tau = \frac{1}{s^2+1} \quad (\text{ز}) \quad \rho = \frac{s^2+1}{\sqrt{2}} \quad (\text{ح}) \quad B = \frac{s^2i - \sqrt{2}sj + k}{s^2+1} \quad (\text{ج})$$

٤٩- أوجد K و S لنحى الفراغ $x = t, y = t^2, z = t^3$ المسمى المكعب الملتوى

$$\text{الإجابة : } K = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}, \quad \tau = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

٥٠- بين أن الالتواء لحنى الانحناء = 0 .

٥١- أوجد الانحناء ونصف قطر الانحناء للمنحنى الذى له متجه الموضع $z=0, y=f(x), x=0$ أى أن المنحنى فى المستوى xy و x

$$\text{يسمى بالمعادلة } \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

٥٢- أوجد الانحناء ونصف قطر الانحناء للمنحنى الذى له متجه الموضع $z = a \cos u + b \sin u$ حيث a و b ثوابت

موجبة. قم بالحالة التى فيها $a = b$

$$\text{الإجابة : } K = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}}$$

نصف قطرها a ونصف قطر الانحناء a

$$\frac{dT}{ds} = \omega \times T, \quad \frac{dN}{ds} = \omega \times N, \quad \frac{dB}{ds} = \omega \times B \quad \text{حيث يمكن كتابتها فى الصورة}$$

وأوجه ω الإجابة : $\omega = \tau T + \kappa B$

٥٤- أثبت أن الاختار لمنحنى الفراغ $r = r(t)$ يعطى عددياً بالتعبية $\kappa = \frac{|\dot{r} \times \ddot{r}|}{|\dot{r}|^3}$ حيث النقطة معناها

التفاضل بالنسبة إلى الزمن t

٥٥- أثبت أن لمنحنى الفراغ $r = r(t)$ $\tau = \frac{\dot{r} \cdot \ddot{r} \times \ddot{\ddot{r}}}{|\dot{r} \times \ddot{r}|^2}$ (ب) إذا كان البراميتر t هو طول القوس S بين أن

٥٦- إذا كان $Q = r \times r$ بين أن $\kappa = \frac{Q}{|\dot{r}|^3}$ ، $\tau = \frac{Q \cdot \ddot{r}}{Q^2}$

٥٧- أوجد κ و τ لمنحنى الفراغ $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$, $z = 4 \sin(\theta/2)$

الإجابة : $\kappa = \frac{1}{8} \sqrt{8 - 2 \cos \theta}$, $\tau = \frac{(3 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}}{12 \cos \theta - 4}$

أوجد لتواء المنحنى $z = \frac{2t+1}{t-1}$, $y = \frac{t^2}{t-1}$, $x = t+2$ اشرح إجابتك

الجواب : $\tau = 0$ يقع المنحنى على المستوى $x - 3y + 3z = 5$

٥٨- بين أن معادلات المماس الخطية والعمود الأساسى وثالث التماس لمنحنى الفراغ $r = r(t)$ عند النقطة $t = t_0$ يمكن كتابتها على

التقريب $r = r_0 + tT_0$, $r = r_0 + tN_0$, $r = r_0 + tB_0$ حيث t هي براميتر

٥٩- أوجد معادلات للاق (أ) المماس (ب) العمود الأساسى (ج) ثالث التماس لمنحنى $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$

عند النقطة التي فيها $t = \pi$

الإجابة : (أ) المماس $x = -3t + 4\pi$, $y = -\frac{3}{5}t$, $z = 4\pi + \frac{4}{5}t$ أو $x = -3t + 4\pi$, $y = -\frac{3}{5}t$, $z = 4\pi + \frac{4}{5}t$

(ب) العمود $x = -3t + 4\pi$, $y = 4\pi$, $z = 0$ أو $x = -3t + 4\pi$, $y = 4\pi$, $z = 0$

(ج) ثالث التماس $x = -3t + 4\pi$, $y = \frac{4}{5}t$, $z = \frac{3}{5}t$ أو $x = -3t + 4\pi$, $y = \frac{4}{5}t$, $z = \frac{3}{5}t$

٦٠- أوجد معادلات للاق (أ) مستوى التماس (ب) المستوى العمودى (ج) المستوى المماس لمنحنى $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 3t^3$

عند النقطة التي فيها $t = 1$

الإجابة : (أ) $y - z + 1 = 0$ (ب) $y + z - 7 = 0$ (ج) $x = 2$

٦١- (أ) بين أن تفاضل طول المنحنى على سطح $r = r(u, v)$ يعطى بالمعادلة $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

حيث $E = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2$, $F = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v}$, $G = \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$

(ب) أثبت أن لشرط اللازم والكاف لكي يكون u, v لنظام إحداثيات منحنى الانحلال متعامدة هو $F \equiv 0$

٦٢- أوجد معادلة مستوى المماس للسطح $xy = xz$ عند النقطة $(2, 3, 6)$. الجواب : $3x + 2y - z = 6$

٦٤- أوجد معادلات مستوى المماس والخط العمودي للسطح $z = x^2 - y^2$ عند النقطة $(2, 1, 3)$

الجواب : $3x - y - 2z = 4; x = 3z + 2, y = 1 - z, z = 2 - 2x$

٦٥- أثبت أن وحدة المتجه العمودي للسطح $z = z(u, v)$ هي $\mathbf{n} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$ حيث E, F, G معرفة من مسألة ٦٢.

ميكانيكا :

٦٦- جسم يتحرك على نفس المنحنى $\mathbf{R} = (3t^2 - 2t)\mathbf{i} + (4t^2 + t)\mathbf{j} + (t^3 - t^2)\mathbf{k}$ حيث t هي الزمن . أوجد قيمة المركبات المماسية والعمودية للمجلة عند $t = 2$

الإجابة : المماسية ، 16 و العمودية $2\sqrt{36}$

٦٧- إذا كانت سرعة جسم هي \mathbf{v} ومجسته هي \mathbf{a} على طول منحنى الفراغ . أثبت أن نصف قطر الاعتماد لطريقة يعطى محدياً بالمعادلة $\rho = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$

٦٨- جذب جسم لنقطة ثابتة O بقوة $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$ تسمى القوة المركزية حيث \mathbf{r} هو متجه الموضع للجسم بالنسبة إلى O بين أن $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$ حيث \mathbf{h} هو متجه ثابت . أثبت أن حزم كمية التحرك يساوى قيمة ثابتة

٦٩- أثبت أن المجلة المنتجة لجسم يتحرك على طول منحنى فراغي دائماً تقع في مستوى الثقل .

٧٠- (أ) أوجد المجلة لجسم يتحرك في المستوى xy بإزالة الإحداثيات القطبية (ρ, ϕ)

(ب) ما هي مركبات المجلة للموازاة والعمودية على ρ ؟

$$\mathbf{r} = [(\dot{\rho} - \rho\dot{\phi}) \cos \phi - (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \sin \phi] \mathbf{i} + [(\dot{\rho} - \rho\dot{\phi}) \sin \phi + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \cos \phi] \mathbf{j} \quad (أ) \text{ الجواب :}$$

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \quad (ب)$$

الفصل الرابع

الانحدار والتباعد والاتفاف

المعامل التفاضلي المتجه (ديل) : تكتب ∇ وتعرف بالمادلة

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

عامل المتجه هذا يمتلك خواص تشابه تلك المتجهات العادية . من المفيد في تعريف ثلاث كيات التي تظهر في التطبيقات العملية ومعروفة كالانحدار والتباعد والاتفاف . المعامل ∇ معروف أيضا بتأطلا .

الانحدار : لتكن $\phi(x, y, z)$ معرفة وقابلة للتفاضل عند كل نقطة (x, y, z) في منطقة معينة في الفراغ (أي أن ϕ هي المجال المبدى القابل للتفاضل) . إذن فإن انحدار ϕ تكتب على صورة $\nabla \phi$ أو انحدار ϕ ($\text{grad } \phi$) ويهرف بالمادلة .

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

لاحظ أن $\nabla \phi$ تعرف بحالة متجه

مركبة $\nabla \phi$ في اتجاه وحدة المتجه \mathbf{a} هي $\mathbf{a} \cdot \nabla$ وتسمى التفاضل الاتجاهي للقيمة ϕ في اتجاه \mathbf{a} . ليذ بالآيا هذا هو معدل تغير ϕ عند (x, y, z) في اتجاه \mathbf{a} .

التباعد : ليكن $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1 \mathbf{i} + V_2 \mathbf{j} + V_3 \mathbf{k}$ معرفة وقابلة للتفاضل عند كل نقطة (x, y, z) في نقطة معينة في الفراغ (أي أن \mathbf{V} هي مجال المتجه القابل للتفاضل) . إذن تباعد \mathbf{V} يكتب على الصورة $\nabla \cdot \mathbf{V}$ أو $\text{div } \mathbf{V}$ وتعرف بالمادلة

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (V_1 \mathbf{i} + V_2 \mathbf{j} + V_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{aligned}$$

لاحظ التشابه مع $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$ أيضا لاحظ أن $\nabla \cdot \mathbf{V} \neq \mathbf{V} \cdot \nabla$

الاتصال : إذا كان $V(x, y, z)$ مجال حجه قابل التفاضل إذن الاتصال V يكتب $\text{rot } V$ أو $\text{curl } V$ و $\nabla \times V$ ويرف بالمعادلة

$$\nabla \times V = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (V_1 i + V_2 j + V_3 k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} k$$

$$= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) k$$

لاحظ أنه مع ذلك الحد فإن المتجهات $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ لا بد أن تتفق V_1, V_2, V_3

المسئمة المتضمنة ∇ : إذا كان A و B دوال متجه قابلة للتفاضل و ϕ و ψ دوال عددية قابلة للتفاضل للموضع إذن (x, y, z)

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi \quad \text{أو} \quad \text{grad}(\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B \quad \text{أو} \quad \text{div}(A + B) = \text{div } A + \text{div } B \quad (2)$$

$$\nabla \times (A + B) = \nabla \times A + \nabla \times B \quad \text{أو} \quad \text{curl}(A + B) = \text{curl } A + \text{curl } B \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi (\nabla \cdot A) \quad (4)$$

$$\nabla \times (\phi A) = (\nabla \phi) \times A + \phi (\nabla \times A) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) \quad (6)$$

$$\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla) A - B (\nabla \cdot A) - (A \cdot \nabla) B + A (\nabla \cdot B) \quad (7)$$

$$\nabla (A \cdot B) = (B \cdot \nabla) A + (A \cdot \nabla) B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (8)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (9)$$

$$\text{حيث} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{تسمى بمعدل لابلاس}$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (10) \quad \text{التفاضل المتجهي للقيمة} \phi \text{ تكون صفر}$$

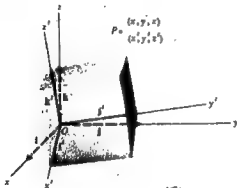
$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0 \quad (11)$$

التفاضل المتباين المتجه A يكون صفر

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad (12)$$

في الصيغ من ٩-١٢ افترض أن A لها مشتقة ثانية جزئية مستمرة .

النتائج : عند في الاعتبار نظام إحداثيات معامدة (x, y, z) و (x', y', z') شكل ٤ - ١ لها نفس نقطة الأصل O ولكن محاورها تدور بالنسبة لبعضهما البعض .



شكل ٤ - ١

التقطة P في الفراغ لها الإحداثيات (x, y, z) أو (x', y', z') بالنسبة لطيفين النظامين من الإحداثيات . معادلات التحويل بين الإحداثيات أو تحويلات الإحداثيات تعطى بالمعادلات .

$$\begin{aligned} x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z \\ y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \\ z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z \end{aligned} \quad (1)$$

حيث $l_{ik}, i, k = 1, 2, 3$ تمثل الاتجاهات جيوب التمام المحاور x', y', z' بالنسبة للمحاور x, y, z (أنظر مسألة ٣٨) . في حالة عدم انطباق لنقط الأصل لنظامي الإحداثيات فإن معادلات التحويل تصبح .

$$(2) \quad \begin{cases} x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z + a'_1 \\ y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z + a'_2 \\ z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z + a'_3 \end{cases}$$

حيث الأصل O لنظام الإحداثيات x, y, z تقع عند النقطة (a'_1, a'_2, a'_3) بالنسبة لنظام الإحداثيات x', y', z'

معادلات التحويل (١) تمثل التفاضل (دوران) في بينا المعادلات (٢) تعرف دوران زائد إزاحة . حركة أي جسم صلب له تأثير إزاحة متجهها بدوران التحويل (١) يسمى تحولا عوديا . التحويل الخطي العام يسمى تحولا متصلا (منتشبا) .

فيزيائيا دالة التقطة المادية أو المجال البدئي $\phi(x, y, z)$ المحسوب عند نقطة معينة يجب أن يكون مستقلا عن إحداثيات التقطة . لذلك فإن درجة الحرارة عند نقطة لا تتوقف (تتغير) على أن الإحداثيات قد استعملت (x, y, z) أو (x', y', z') إذن إذا كانت $\phi(x, y, z)$ هي درجة الحرارة عند نقطة P التي لها الإحداثيات (x, y, z) بينما (x', y', z') هي درجة الحرارة عند نفس التقطة P ذات الإحداثيات (x', y', z') فيجب أن تكون $\phi(x, y, z) = \phi(x', y', z')$. إذا كان $\phi(x', y', z') = \phi(x, y, z)$ حيث x, y, z و x', y', z' تكون مرتبطة بمعادلات التحويل (١) أو (٢)

وتسمى $\phi(x, y, z)$ ثابت بالنسبة إلى التحول. كتال $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ هي ثابت تحت التحول الدوراني.

$$(1) \text{ حيث } x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

بالمثل حالة نقطة متجه أو مجال متجه $A(x, y, z)$ تسمى ثابت إذا كان $A(x, y, z) = A(x', y', z')$ ويكون هذا ممكنا إذا كان

$$A_1(x, y, z)i + A_2(x, y, z)j + A_3(x, y, z)k = A'_1(x', y', z')i' + A'_2(x', y', z')j' + A'_3(x', y', z')k'$$

في الفصل السابع والثامن ستتعلم في الاعتبار تحولات عامة أكثر مع التوسع في المفاهيم المذكورة هاهنا.

يمكن أن نرى (أنظر مسألة ١١) أن الاشتقاق لتناهي مجال متجه هو ثابت مجال متجه بالنسبة لتحويلات (١) أو (٢). بالمثل التفاضل والاشتقاق لتناهي مجال متجه هو ثابت تحت هذه التحويلات.

أمثلة محلولة

الاشتقاق :

١- إذا كان $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^2z^2$ أوجد $\nabla\phi$ (or grad ϕ) at the point $(1, -2, -1)$

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)(3x^2y - y^2z^2) \\ &= i\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^2z^2) + j\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^2z^2) + k\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^2z^2) \\ &= 6xyi + (3x^2 - 2yz^2)j - 2y^2zk \\ &= 6(1)(-2)i + \{3(1)^2 - 2(-2)^2(-1)^2\}j - 2(-2)^2(-1)k \\ &= -12i - 9j - 16k \end{aligned}$$

٢- أثبت (١) $\nabla(F+G) = \nabla F + \nabla G$ (ب) $\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$ حيث G, F هي دوال عددية قابلة

للتفاضل عند x, y, z

$$\begin{aligned} \nabla(F+G) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)(F+G) \quad (1) \\ &= i\frac{\partial}{\partial x}(F+G) + j\frac{\partial}{\partial y}(F+G) + k\frac{\partial}{\partial z}(F+G) \\ &= i\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial G}{\partial x} + j\frac{\partial F}{\partial y} + j\frac{\partial G}{\partial y} + k\frac{\partial F}{\partial z} + k\frac{\partial G}{\partial z} \\ &= i\frac{\partial F}{\partial x} + j\frac{\partial F}{\partial y} + k\frac{\partial F}{\partial z} + i\frac{\partial G}{\partial x} + j\frac{\partial G}{\partial y} + k\frac{\partial G}{\partial z} \\ &= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)F + \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)G = \nabla F + \nabla G \end{aligned}$$

- ٥- بين أن $\nabla \phi$ هو متجه عمودي على السطح $\phi(x, y, z) = c$ حيث c ثابت
ليكن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ هو متجه الموضع لأي نقطة $P(x, y, z)$ على السطح .
إذن $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ تقع في المستوى المماس للسطح عند P

ولكن

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = 0$$

أي أن $\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 0$ وبذلك $\nabla \phi$ يكون عموديا على $d\mathbf{r}$ وبالتالي على السطح .

- ٦- أوجد الوحدة السودية للسطح $x^2y + 2xz = 4$ عند النقطة $(2, -2, 3)$

$$\text{عند النقطة } (2, -2, 3) \quad \nabla(x^2y + 2xz) = (2xy + 2z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\text{إذن الوحدة السودية للسطح} = \frac{-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (4)^2}} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

وحدة عمودية أخرى هي $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$ لها اتجاه معاكس للوحدة السودية الموضحة عالية .

- ٧- أوجد معادلة مستوى المماس للسطح $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ عند النقطة $(1, -1, 2)$

$$\nabla(2xz^2 - 3xy - 4x) = (2z^2 - 3y - 4)\mathbf{i} - 3xz\mathbf{j} + 4xz\mathbf{k}$$

إذن المستوى المماس عند النقطة $(1, -1, 2)$ هي $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ معادلة المستوى المار خلال النقطة التي لها متجه الموضع \mathbf{r}_0 ويكون متعامداً على المتجه \mathbf{N} هو $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$ (أنظر الفصل الثاني . مسألة ١٨)
إذن المعادلة المطلوبة هي

$$[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (1\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})] \cdot (7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = 0$$

$$7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0.$$

- ٨- ليكن $P(x, y, z)$ و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ هي درجتا الحرارة عند نقطتين متقاربتين $P(x, y, z)$ و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ لمنطقة معينة

(١) علل فيزيائيا الكمية $\frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$ حيث Δs هي المسافة بين النقطتين P و Q

(ب) احسب $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$ أو علل فيزيائيا .

(ج) بين أن $\frac{d\phi}{ds} = \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$

(أ) حيث ϕ هي التغير في درجة الحرارة بين نقطتين P و Q و Δs هي المسافة بين هاتين النقطتين ، وتمثل $\Delta \phi / \Delta s$ متوسط معدل تغير درجة الحرارة لكل وحدة مسافة في الاتجاه من P إلى Q .

(ب) من حساب التفاضل والتكامل

$$\Delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta z +$$

رتب متناهية الصغر أعلى من $\Delta x, \Delta y$ و Δz

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad \text{أو}$$

$d\phi/ds$ يمثل معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة للمسافة عند النقطة P في اتجاه نحو النقطة Q . هذه أيضا

تسمى المشتقات الاتجاهية لـ ϕ .

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \right) \cdot \left(\frac{dx}{ds} i + \frac{dy}{ds} j + \frac{dz}{ds} k \right) \quad (1) \\ &= \nabla \phi \cdot \frac{dr}{ds} \end{aligned}$$

لاحظ حيث أن dr/ds هي وحدة المتجه و $\nabla \phi \cdot dr/ds$ هي مركبة $\nabla \phi$ في اتجاه وحدة المتجه dr/ds .

٩- بين أن أكبر معدل لتغير ϕ أي أن أكبر المشتقات الاتجاهية، تأخذ اتجاه قيمة المتجه $\nabla \phi$.

من المسألة (٨ ج) و $d\phi/ds = \nabla \phi \cdot dr/ds$ هو إسقاط $\nabla \phi$ في اتجاه dr/ds . هذا الإسقاط يكون

أكبر ما يمكن عندما $\nabla \phi$ و dr/ds يكون لهما نفس الاتجاه. إذن أكبر قيمة لـ $d\phi/ds$ تكون في اتجاه $\nabla \phi$ وقيمته هي $|\nabla \phi|$.

$$10- أوجد المشتقة الاتجاهية لـ $\phi = xyz + 4xz^2$ عند $(1, -2, -1)$ في اتجاه $2i - j - 2k$$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \nabla(xyz + 4xz^2) = (yz + 4z^2)i + (xy + 8xz)j + (xz + 8xz)k \\ &= 8i - j - 10k \quad \text{عند } (1, -2, -1). \end{aligned}$$

وحدة المتجه في اتجاه $2i - j - 2k$ هو

$$u = \frac{2i - j - 2k}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$$

إذا المشتقة الاتجاهية المطلوبة هي

$$\nabla \phi \cdot u = (8i - j - 10k) \cdot \left(\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k \right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

حيث تكون موجبة و ϕ تزايد في هذا الاتجاه.

١١- (١) في أي اتجاه من المنطقة $(2, 1, -1)$ تكون المشتقة لـ $\phi = xyz^2$ أكبر ما يمكن؟

(ب) ما هي القيمة الكبرى ؟

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \nabla(x^2y^2) = 2xy^2\mathbf{i} + x^22y\mathbf{j} + 2x^2y^2\mathbf{k} \\ &= -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \text{ at } (2,1,-1)\end{aligned}$$

بدن باستخدام المسألة ٩.

(١) تكون المنطقة الاتجاهية أكبر ما يمكن في الاتجاه

$$\nabla\phi = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

(ب) هذه القيمة الكبرى هي

$$|\nabla\phi| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$$

١٧- أوجد الزاوية بين السطحين $z = x^2 + y^2 - 3$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ عند النقطة $(2, -1, 2)$

الزاوية بين السطح عند النقطة هي الزاوية بين الأعمدة للأسطح عند النقطة .

المسوى الكلية $z = x^2 + y^2 - 3$ at $(2, -1, 2)$ يكون

$$\nabla\phi_1 = \nabla(x^2 + y^2 - z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

المسوى الكلية $z = x^2 + y^2 - 3$ at $(2, -1, 2)$ يكون

$$\nabla\phi_2 = \nabla(x^2 + y^2 - z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

إذن $(\nabla\phi_1) \cdot (\nabla\phi_2) = |\nabla\phi_1| |\nabla\phi_2| \cos \theta$ حيث θ هي الزاوية المطلوبة .

$$\begin{aligned}(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) &= |4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}| |4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}| \cos \theta \\ 16 + 4 - 4 &= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cos \theta\end{aligned}$$

$$\theta = \arccos 0.5819 = 54^\circ 25' \text{ حيث الزاوية المحاذية هي } \cos \theta = \frac{-16}{6\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{63}, 0.5819 \text{ و}$$

١٨- لتكن R هي المساحة من نقطة ثابته $A(a, b, c)$ إلى أي نقطة $P(x, y, z)$. بين أن ∇R هي وحدة المتجه في

الاتجاه \overrightarrow{AP}

إذا كان \mathbf{r}_P و \mathbf{r}_A هي متجهات الموضع $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ لكل من A و P حل

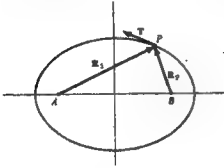
$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A = (x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k} \text{ إذن}$$

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \text{ إذن}$$

$$\nabla R = \nabla(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}) = \frac{(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

يكون وحدة المتجه في الاتجاه \mathbf{R} .

١٤ - ليكن P . أي نقطة على القطع الناقص التي يوترها عند التقاطعين B و A شكل ٤ . أثبت أن الخطين AP و BP يصحان زوايا متساوية مع المماس للقطع الناقص عند P



شكل ٤ - ٢

ليكن $R_1 = AP$, $R_2 = BP$. تبين الموجهات المرسومة من البؤرة A وكذلك البؤرة B على الترتيب إلى النقطة P الواقعة على الناقص . وليكن T وحدة المماس للقطع الناقص عند P .

حيث أن القطع الناقص هو الحل الهندسي لكل النقط P التي مجموع مسافاتهن من التقاطعين المتساويين A و B تكون ثابت p . ونرى أن معادلة القطع الناقص تكون $R_1 + R_2 = p$.

من المسألة (٥) ، المبرود على القطع الناقص هو $\nabla(R_1 + R_2)$ وبالتالي

$$[\nabla(R_1 + R_2)] \cdot T = 0 \text{ or } (\nabla R_2) \cdot T = -(\nabla R_1) \cdot T$$

حيث ∇R_1 , ∇R_2 هي وحدة الموجهات في اتجاه R_2 , R_1 على الترتيب مسألة (١٣) ، يجب تمام الزاوية بين ∇R_1 , T تساوي يجب تمام الزاوية بين ∇R_2 , T .

وبالتالي فالزوايا نفسها متساوية . المسألة هنا لتبيل نيزايل . أشعة الضوء (أو الموجات الصوتية) مبطنة من البؤرة A على ميل المثال سوف تنعكس من القطع الناقص إلى البؤرة B .

التمارين :

١٥ - إذا إذا كان $A = x^2z \mathbf{i} - 2y^2z \mathbf{j} + xy^2z \mathbf{k}$ أوجد $\nabla \cdot A$ (or $\text{div } A$) عند النقطة $(1, -1, 1)$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x^2z \mathbf{i} - 2y^2z \mathbf{j} + xy^2z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z) \\ &= 2xz - 4yz + xy = 2(1)(1) - 4(-1)(1) + (1)(-1) = -2 \text{ at } (1, -1, 1) \end{aligned}$$

١٦ - أعطيت $\phi = 2x^2y^2z^2$ (١) أوجد $\nabla \cdot \nabla \phi$ (or $\text{div grad } \phi$)

(ب) تبين أن $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$ حيث $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ تبين عامل لابلاس

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2z^2) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y^2z^2) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y^2z^2) \\ &= 4xy^2z^2 \mathbf{i} + 4x^2yz^2 \mathbf{j} + 4x^2y^2z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (١)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (8xz^2y^4i + 4xz^2yz^4j + 8xz^2y^2zk) \quad \text{إذن} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(8xz^2y^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4xz^2yz^4) + \frac{\partial}{\partial z}(8xz^2y^2z^3) \\ &= 12zy^4z^2 + 4xz^2z^4 + 24xz^2y^2z^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \right) \quad (\text{ب}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \nabla^2 \phi\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

١٧ - أثبت أن

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] \\ &= -2x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{2x^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\end{aligned}$$

بالمثل

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = 0 \quad \text{إذن بالجمع}$$

المعادلة $\nabla^2 \phi = 0$ تسمى معادلة لابلاس . ونسبها يظهر أن $\phi = 1/r$ هو حل هذه المعادلة

$$\nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi (\nabla \cdot A) \quad (\text{ب}) \quad \text{١٨ - أثبت}$$

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad B = B_1 i + B_2 j + B_3 k \quad (1)$$

إذن

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A+B) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot [(A_1+B_1)i + (A_2+B_2)j + (A_3+B_3)k] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (A_1+B_1) + \frac{\partial}{\partial y} (A_2+B_2) + \frac{\partial}{\partial z} (A_3+B_3) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k) \\ &= \nabla \cdot A + \nabla \cdot B \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi A) &= \nabla \cdot (\phi A_1 i + \phi A_2 j + \phi A_3 k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_3) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \phi \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \frac{\partial A_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k) + \phi \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \\ &= (\nabla \phi) \cdot A + \phi (\nabla \cdot A) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{r}{r^3} \right) = 0 \quad 14 - \text{أثبت}$$

ليكن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، $A = \frac{r}{r^3}$ من نتائج مسألة (18)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (r^{-3} r) &= (\nabla r^{-3}) \cdot r + (r^{-3}) \nabla \cdot r \quad \text{إذن} \\ &= -3r^{-5} r \cdot r + 3r^{-5} = 0 \end{aligned}$$

استخدم مسألة 14

$$\nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U) = U \nabla^2 V - V \nabla^2 U \quad 15 - \text{أثبت}$$

من المسألة (18) مع

$$\phi = U \quad , \quad A = \nabla V$$

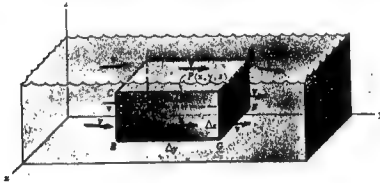
$$\nabla \cdot (U \nabla V) = (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U (\nabla \cdot \nabla V) = (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U \nabla^2 V$$

$$\nabla \cdot (V \nabla U) = (\nabla V) \cdot (\nabla U) + V \nabla^2 U \quad \text{بما أن } U \text{ و } V \text{ يتبادل}$$

إذن بالطرح

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (U \nabla V) - \nabla \cdot (V \nabla U) &= \nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U) \\ &= (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U \nabla^2 V - [(\nabla V) \cdot (\nabla U) + V \nabla^2 U] \\ &= U \nabla^2 V - V \nabla^2 U \end{aligned}$$

٢١- مانع يتحرك بحيث أن سرعته عند أي نقطة تكون $v(x, y, z)$. بين أن زيادة المسائل لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن في متوازي سطوح صغيرة مركزة عند $P(x, y, z)$ وأسرفه متوازي محاور الإحداثيات ولها القيم $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ، عل الترتيب يعطى تقريبا بالمعادلة $\text{div } v = \Delta \cdot v$.



شكل ٢ - ٤

بالرجوع إل شكل ٢ - ٤

$$v_1 = \text{سرعة } v \text{ عند } P$$

$$\text{سرعة } v \text{ عند مركز الوجه } AFED = v_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \quad \text{تقريباً}$$

$$\text{سرعة } v \text{ عند مركز الوجه } GHCB = v_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \quad \text{تقريباً}$$

$$\text{إذن (١) حجم المائع الذي يمر } AFED \text{ في وحدة الزمن} = (v_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z$$

$$\text{(٢) حجم المائع الذي يمر } GHCB \text{ في وحدة الزمن} = (v_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z$$

$$\text{الزيادة في الحجم لكل وحدة زمن في اتجاه } x = (2) - (1) = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{بالمثل، الزيادة في الحجم لكل وحدة زمن في اتجاه } y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = v \quad \text{في اتجاه } x$$

إذن الزيادة الكلية في الحجم لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن =

$$= \frac{(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \text{div } v = \nabla \cdot v$$

هذه صحيحة فقط في النهاية التي ينكسر متوازي السطح إلى P أي أن $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ تقرب من الصفر . إذا كان لا يوجد زيادة للمائع في أي مكان ، إذن $\nabla \cdot v = 0$ وهذه تسمى المعادلة المستمرة للمائع غير القابل للانضغاط . حيث أن السائل لا يمكن أن يخلق أو يتدمر عند أي نقطة ، يقال أنه لا يوجد منبع أو مصب . هذه مثل v التي تباينه يساوي صفرا في بعض الأحيان يسمى لولبي .

$$v = (x+3y)i + (y-2x)j + (x+az)k \quad \text{بحيث أن المتجه } a \text{ يكون لولبيا}$$

يكون المتجه v لولبيا إذا كان تباينه يساوي صفرا (مسألة ٢١) .

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2x) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) = 1 + 1 + a$$

$$\nabla \cdot v = a + 2 = 0 \text{ when } a = -2 \quad \text{إذن}$$

الانحناء أو الدوران :

$$v = (1, -1, 1) \quad \text{إذا كان } A = xz^2 i - 2x^2 yz j + 2yz^4 k \quad \text{أوجد } \nabla \times A \text{ (التفاف } A \text{) عند النقطة } (1, -1, 1)$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (xz^2 i - 2x^2 yz j + 2yz^4 k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & -2x^2 yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4) - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^2 yz) \right] i + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2yz^4) \right] j + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2 yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^2) \right] k$$

$$= (2z^4 + 2x^2 y) i + 3z j - 4xyz k = 3j + 4k \text{ at } (1, -1, 1)$$

٧٤- إذا كان $A = x^2y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ أوجد التفاضل $\nabla \times A$

$\nabla \times A = \nabla \times (\nabla \times A)$

$$= \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = \nabla \times [(2x+2z)\mathbf{i} - (x^2+2z)\mathbf{j}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -x^2-2z \end{vmatrix} = (2x+2z)\mathbf{j}$$

٧٥- أوجد $\nabla \times (A+B) = \nabla \times A + \nabla \times B$ (أ)

$\nabla \times (\phi A) = (\nabla \phi) \times A + \phi (\nabla \times A)$ (ب)

(١) ليكن

$A = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, B = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$

إذن $\nabla \times (A+B) = (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}) \times [(A_1+B_1)\mathbf{i} + (A_2+B_2)\mathbf{j} + (A_3+B_3)\mathbf{k}]$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1+B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(A_3+B_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_2+B_2)]\mathbf{i} + [\frac{\partial}{\partial z}(A_1+B_1) - \frac{\partial}{\partial x}(A_3+B_3)]\mathbf{j}$$

$$+ [\frac{\partial}{\partial x}(A_2+B_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1+B_1)]\mathbf{k}$$

$$= [\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}]\mathbf{i} + [\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}]\mathbf{j} + [\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}]\mathbf{k}$$

$$+ [\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}]\mathbf{i} + [\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}]\mathbf{j} + [\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}]\mathbf{k}$$

$$= \nabla \times A + \nabla \times B$$

$\nabla \times (\phi A) = \nabla \times (\phi A_1\mathbf{i} + \phi A_2\mathbf{j} + \phi A_3\mathbf{k})$ (ب)

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)]\mathbf{i} + [\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)]\mathbf{j} + [\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)]\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\phi \frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_3 - \phi \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right] i \\
&\quad + \left[\phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 - \phi \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right] j + \left[\phi \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_2 - \phi \frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_1 \right] k \\
&= \phi \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) k \right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} A_3 - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right) i + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right) j + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_1 \right) k \right] \\
&= \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
&= \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A}
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) \text{ if } \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{٢٦- احسب}$$

$$\mathbf{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad \mathbf{r} = x i + y j + z k \quad \text{ليكن}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \text{إذن} \\
&= (zA_2 - yA_3)i + (xA_3 - zA_1)j + (yA_1 - xA_2)k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} (zA_2 - yA_3) + \frac{\partial}{\partial y} (xA_3 - zA_1) + \frac{\partial}{\partial z} (yA_1 - xA_2) \\
&= z \frac{\partial A_2}{\partial x} - y \frac{\partial A_3}{\partial x} + x \frac{\partial A_3}{\partial y} - z \frac{\partial A_1}{\partial y} + y \frac{\partial A_1}{\partial z} - x \frac{\partial A_2}{\partial z} \\
&= x \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) + y \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\
&= (x i + y j + z k) \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) k \right] \\
&= \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{r} \cdot \text{curl } \mathbf{A}, \quad \text{إذن } \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \\
&\text{يصل هذا المصدر}
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{ب}) \quad \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0} \quad (\text{curl grad } \phi = \mathbf{0}) \quad (1) \quad \text{أثبت (1)} \\
(\mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ المتكافئ})$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \phi) &= \nabla \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \mathbf{k} \\
 &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

عل فرض أن ϕ لها المشتقة الثانية الجزئية المستمرة بحيث أن رتبة التفاضل غير ذات موضوع

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
 &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0
 \end{aligned}
 \tag{ب}$$

يفرض أن التفاضل الجزئي الثلاثي المتجه \mathbf{A} مستمر

لاحظ التماثل بين النتائج السابقة والنتائج
 $(\mathbf{C} \times \mathbf{Cm}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C})m = \mathbf{0}$ حيث m كمية عددية
 $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$

٢٨- أوجد التفاضل $(\nabla f(r))$ حيث $f(r)$ قابلة للتفاضل

$$\begin{aligned}
 \text{curl } (\nabla f(r)) &= \nabla \times (\nabla f(r)) \\
 &= \nabla \times (x f(r) \mathbf{i} + y f(r) \mathbf{j} + z f(r) \mathbf{k}) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x f(r) & y f(r) & z f(r) \end{vmatrix} \\
 &= \left(z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{f'_r(x) x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{f'_r x}{r} \quad \text{ولكن}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f'_r y}{r} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f'_r z}{r} \quad \text{بالمثل}$$

$$= (x \frac{f'_r y}{r} - y \frac{f'_r x}{r})i + (x \frac{f'_r z}{r} - z \frac{f'_r x}{r})j + (y \frac{f'_r z}{r} - z \frac{f'_r y}{r})k = 0 \quad \text{إذن النتيجة}$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A) \quad \text{مثال ١٩}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times A) &= \nabla \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) k \right] \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \right] i \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \right] j \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \right] k \\ &= \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right) i + \left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \right) j + \left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} \right) k \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial z} \right) j + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial x} \right) k \\ &= \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right) i + \left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \right) j + \left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right) k \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} \right) i + \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} \right) j + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right) k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(A_1 i + A_2 j + A_3 k) \\
 &\quad + i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + j \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) \\
 &= -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) \\
 &= -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})
 \end{aligned}$$

إذا رغبتا يمكن اختصار مجهود الكتابة في هذا التفاضل كما في غير من مقتضات بكتابة المركبة ، فقط حيث يمكن الحصول على الآخرين بالتشابه .

يمكن استنتاج صيغة النتيجة كالآتي من المسألة ٤ (١) الباب الثاني .

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \nabla \quad \text{و} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F} \quad \text{نضع}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

لاحظ أن الصيغة (١) لابد أن تكتب بحيث أن العاملين المؤثرين \mathbf{A} و \mathbf{B} سبق الموصول عليه \mathbf{C} أو أن الصيغ لا تصلح لتطبيق .

٥ - إذا كان $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ أثبت أن $\frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{v} = \omega$ حيث ω هي متجه ثابت .

$$\begin{aligned}
 \text{curl } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\omega \times \mathbf{r}) = \nabla \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
 &= \nabla \times [(\omega_2 z - \omega_3 y)i + (\omega_3 x - \omega_1 z)j + (\omega_1 y - \omega_2 x)k] \\
 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = 2(\omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k) = 2\omega .
 \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{v} \quad \text{إذن}$$

تبين هذه المسألة أن الاشتقاق الجبال متجه له علاقة بخواص الدوران الجبال وأكد هذا في الفصل السادس .
إذا كان الجبال \mathbf{F} نتيجة حركة مائع مثلاً ، عجلة تدفيل موضوعة عند نقطة مختلفة في الجبال . فإنها تميل للدوران

في المنطقة التي فيها $\text{Curl } \mathbf{F} \neq 0$ ، بينما إذا كان $\text{Curl } \mathbf{F} = 0$ في المنطقة بالتالي لا يوجد دوران . ويسمى المجال \mathbf{F} لا دوراني . المجال الذي لا يكون لا دوراني أحيانا يسمى مجال دوامي vortex field .

$$٢١- \text{ إذا كان } \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \text{ ، } \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \text{ ، } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \text{ ، } \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ ، } \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \text{ ، بين أن } \mathbf{H} \text{ و } \mathbf{E} \text{ تحقق } \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} \text{ ، Then } \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \text{ من المسألة ٢٩}$$

$$\text{وبالمثل } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\text{ولكن } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} \text{ ، إذن } \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

نربط المعادلات المسألة بمعادلات ماكسويل في النظرية الكهرومغناطيسية المعادلة $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ تسمى معادلة الموجة (wave) .

مسائل متنوعة

٢٢- (١) يسمى المتجه \mathbf{V} لا دوراني إذا كان $\text{Curl } \mathbf{V} = 0$ (أنظر مسألة ٢٠) أوجد الثوابت a, b, c بحيث أن

$$\mathbf{V} = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}$$

يكون لا دوراني

(ب) بين أن \mathbf{V} يمكن التعبير عنها كإعدادار لدالة المبدئية

$$\text{curl } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z \end{vmatrix} = (a+1)\mathbf{i} + (a-4)\mathbf{j} + (b-2)\mathbf{k} \quad (1)$$

هذه تساوي صفراً عندما $a=4, b=2, c=-1$

$$\mathbf{V} = (x + 2y + 4z)\mathbf{i} + (2x - 3y - z)\mathbf{j} + (4x - y + 2z)\mathbf{k} \quad ٢$$

$$\nabla = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_3 \quad (\text{ب}) \text{ انظر}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x + 2y + 4z, \quad (2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x - 3y - z, \quad (3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 4x - y + 2z \quad (1) \quad \text{إذن}$$

تكامل (١) جزئيا بالنسبة لـ x مع الاحتفاظ بـ y, z ثابتة (٤)

$$\phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y, z)$$

حيث $f(y, z)$ هي دالة اختيارية في y, z بالنظر من (٢) ، (٣)

$$\phi = 2xy - \frac{3y^2}{2} - yz + g(x, z) \quad (٥)$$

$$\phi = 4xz - yz + z^2 + h(x, y) \quad (٦)$$

بمقارنة المعادلات (٤) ، (٥) ، (٦) نلاحظ وجود قيمة مشتركة لكافة ϕ ، إذا اخترنا .

$$f(y, z) = -\frac{3y^2}{2} + z^2, \quad g(x, z) = \frac{x^2}{2} + z^2, \quad h(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

لذلك

$$\phi = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz$$

نلاحظ أنه يمكن إضافة أي ثابت لكافة ϕ . كل السوم إذا كانت $\nabla \times \nabla = 0$ ، إذن يمكننا إيجاد ϕ بحيث أن $\nabla = \nabla \phi$. مجال المتجه ∇ الذي يمكن اشتقاقه من المجال المبدئي ϕ . بحيث أن $\nabla = \nabla \phi$ تسمى مجال متجه محافظ ونسمى ϕ الجهد المبدئي . لاحظ مكملا أنه إذا كان $\nabla \phi = 0$ ، إذن $\nabla \times \nabla = 0$.
انظر مسألة (١٧٧) .

٢٢- بين أنه إذا كانت $\phi(x, y, z)$ هي حل لمعادلة لابلاس إذن $\nabla \phi$ يكون متجهيا لولبيا وغير دوراني .

من نفترض ϕ تحقق معادلة لابلاس $\nabla^2 \phi = 0$ أي أن $\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$ إذن $\nabla \phi$ تكون لولبية (انظر المسائل ٢١-٢٢)

من المسألة (١٧٧) ، $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ ، بحيث أن $\nabla \phi$ تكون أيضا غير دورانية .

٢٤- أوجد التعريف الممكن للتفاضل \mathbb{B} .

بفرض $\mathbb{B} = B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3$ إذا أمكن تعريف التفاضل \mathbb{B} بالصيغة الآتية

$$\begin{aligned}\nabla B &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) (B_1 i + B_2 j + B_3 k) \\ &= \frac{\partial B_1}{\partial x} i i + \frac{\partial B_2}{\partial x} i j + \frac{\partial B_3}{\partial x} i k \\ &\quad + \frac{\partial B_1}{\partial y} j i + \frac{\partial B_2}{\partial y} j j + \frac{\partial B_3}{\partial y} j k \\ &\quad + \frac{\partial B_1}{\partial z} k i + \frac{\partial B_2}{\partial z} k j + \frac{\partial B_3}{\partial z} k k\end{aligned}$$

الكيات ... i, j, k تسمى وحدة ثنائية *Dyads* (لاحظ أن $i i$ مثلا ليست مثل $i j$). كمية في الصيغة

$$a_{11} i i + a_{12} i j + a_{21} j i + a_{22} j j + a_{31} k i + a_{32} k j + a_{33} k k$$

تسمى ثنائية والمعاملات a_{11}, a_{12}, \dots هي مركباتها أي مصفوفة من هذه المركبات التسة في الصيغة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

تسمى مصفوفة في ٣. الثنائي هو تمثيل لهذه. ما زال يوجد تمثيل آخر يؤدي إلى الثالث *triads* التي هي كيات تتكون من ٢٧ حد في الصيغة $a_{111} i i i + a_{211} j j i + \dots$ دراسة كيفية تحول المركبات الثنائية أو الثلاثية من نظام إحداثيات إلى آخر يؤدي إلى دراسة تحليل الكيات الممتدة *senior analysis* التي سوف نعرض لها في الفصل الثامن.

٣٥- ليكن المتجه A معرف بالمعادلة $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ ، والثنائي Φ بالمعادلة

$$\Phi = a_{11} i i + a_{12} i j + a_{21} j i + a_{22} j j + a_{31} k i + a_{32} k j + a_{33} k k$$

أوجد تعريفا يمكننا الكتابة $A \cdot \Phi$

بفرض أن قانون التوزيع صحيح

$$A \cdot \Phi = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot \Phi = A_1 i \cdot \Phi + A_2 j \cdot \Phi + A_3 k \cdot \Phi$$

كذلك ، اعتبر $i \cdot \Phi$. تكون حاصل الضرب هذا يأخذ الضرب النقطي (الذي) لقيمة i بكل حد من حدود Φ ثم جميع النتائج . كالطريقة نموذجية

$$i \cdot a_{11} i i, i \cdot a_{12} i j, i \cdot a_{21} j i, i \cdot a_{22} j j, i \cdot a_{31} k i, i \cdot a_{32} k j, i \cdot a_{33} k k$$

أع

إذاً لدينا معنى هذه الحدود كالآتي

$$\begin{aligned} i \cdot i &= 1 & i \cdot a_{11} i i &= a_{11} (i \cdot i) i = a_{11} i \\ i \cdot j &= 0 & i \cdot a_{12} j i &= a_{12} (i \cdot i) j = a_{12} j \\ i \cdot k &= 0 & i \cdot a_{21} j i &= a_{21} (i \cdot j) i = 0 \\ j \cdot i &= 0 & j \cdot a_{22} k j &= a_{22} (j \cdot k) j = 0 \end{aligned}$$

باعتبار تحليل مشابه لحدود الكليات i, j, k و $j \cdot i$ إذن

$$\begin{aligned} A \cdot \nabla &= A_1(a_{11} i + a_{12} j + a_{13} k) + A_2(a_{21} i + a_{22} j + a_{23} k) + A_3(a_{31} i + a_{32} j + a_{33} k) \\ &= (A_1 a_{11} + A_2 a_{21} + A_3 a_{31}) i + (A_1 a_{12} + A_2 a_{22} + A_3 a_{32}) j + (A_1 a_{13} + A_2 a_{23} + A_3 a_{33}) k \end{aligned}$$

التي هي النتيجة

٢٦- (أ) حلل الرمز $A \cdot \nabla$ (ب) أصلي المتجه $(A \cdot \nabla) B$ (ج) حل ممكن كتابته كالاتي $A \cdot \nabla B$ بدون ∇ (د) (أجاب) ؟

(أ) لكن $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ إذن ، بصيغتها

$$\begin{aligned} A \cdot \nabla &= (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \\ &= A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

كامل مؤثر ، كشال

$$(A \cdot \nabla) \phi = (A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z}) \phi = A_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

لاحظ أن هذه الكمية مثل الكمية $A \cdot \nabla$

(ب) باستخدام (أ) واستبدال ϕ بالمتجه $B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$

$$\begin{aligned} (A \cdot \nabla) B &= (A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z}) B = A_1 \frac{\partial B}{\partial x} + A_2 \frac{\partial B}{\partial y} + A_3 \frac{\partial B}{\partial z} \\ &= A_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} i + \frac{\partial B_2}{\partial x} j + \frac{\partial B_3}{\partial x} k \right) + A_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} i + \frac{\partial B_2}{\partial y} j + \frac{\partial B_3}{\partial y} k \right) + A_3 \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} i + \frac{\partial B_2}{\partial z} j + \frac{\partial B_3}{\partial z} k \right) \end{aligned}$$

(ج) استخدم التحليل الذي أصلي في المسألة ٢٦ لتبينه $\nabla \phi$ إذن تبين الرمز التي استخدمت في المسألة ٢٦

$$\begin{aligned} A \cdot \nabla B &= (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot \nabla B = A_1 i \cdot \nabla B + A_2 j \cdot \nabla B + A_3 k \cdot \nabla B \\ &= A_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} i + \frac{\partial B_2}{\partial x} j + \frac{\partial B_3}{\partial x} k \right) + A_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} i + \frac{\partial B_2}{\partial y} j + \frac{\partial B_3}{\partial y} k \right) + A_3 \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} i + \frac{\partial B_2}{\partial z} j + \frac{\partial B_3}{\partial z} k \right) \end{aligned}$$

التي تعطي نفس النتيجة كالتي أعطيت في الجزء (ب) . ومنها يأتي

أن $(A \cdot \nabla)B = A \cdot \nabla B$ بدون التباس (غرض) أعطيت

مكررة للتشابهات بتواضعها كما وضع .

أولاً $A = 2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$, $B = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ and $\phi = 2x^2yz^2$ إذن $\nabla\phi = \nabla(A \cdot B)$

$$A \times \nabla\phi \quad (A \times \nabla)\phi \quad A \cdot \nabla\phi \quad (A \cdot \nabla)\phi \quad (1)$$

$$(A \cdot \nabla)\phi = [(2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})]\phi \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= (2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z})(2x^2yz^2) \\ &= 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^2) - x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^2) + xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^2) \\ &= (2yz)(4xyz^2) - (x^2y)(2x^2z^2) + (xz^2)(4x^2yz) \\ &= 8xyz^3 - 2x^4yz^2 + 4x^3yz^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \nabla\phi &= (2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \cdot (\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}) \\ &= (2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \cdot (4xyz^2\mathbf{i} + 2x^2z^2\mathbf{j} + 4x^2yz\mathbf{k}) \\ &= 8xyz^3 - 2x^4yz^2 + 4x^3yz^3 \end{aligned} \quad (2)$$

بالمقارنة $(1) \rightarrow (2)$ وضع النتيجة $(A \cdot \nabla)\phi = A \cdot \nabla\phi$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot A)B &= [(x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})]A \\ &= (x^2\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial z})A = x^2\frac{\partial A}{\partial x} + yz\frac{\partial A}{\partial y} - xy\frac{\partial A}{\partial z} \\ &= x^2(-2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) + yz(2x\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}) - xy(2y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{k}) \\ &= (2yz^2 - 2xy^2)\mathbf{i} - (2x^3y + x^2yz)\mathbf{j} + (x^2z^2 - 2x^2yz)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3)$$

بمقارنة هذه مع $\nabla \cdot (A \cdot B)$ أنظر مسألة (٢٦ - ٢٧) .

$$\begin{aligned}
 (A \times \nabla)\phi &= [(2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \times (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})]\phi \quad (3) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \phi \\
 &= [1(-x^2y\frac{\partial}{\partial x} - xz^2\frac{\partial}{\partial y}) + 1(xz^2\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial z}) + \mathbf{k}(2yz\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial z})]\phi \\
 &= (-x^2y\frac{\partial \phi}{\partial x} + xz^2\frac{\partial \phi}{\partial y})\mathbf{i} + (xz^2\frac{\partial \phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial \phi}{\partial z})\mathbf{j} + (2yz\frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial \phi}{\partial z})\mathbf{k} \\
 &= -(6x^4y^2z^2 + 2xz^2z^2)\mathbf{i} + (4xz^2yz^2 - 12x^2y^2z^2)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^2y^2z^2)\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \times \nabla \phi &= (2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \times (\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}) \quad (4) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
 &= (-x^2y\frac{\partial \phi}{\partial x} - xz^2\frac{\partial \phi}{\partial y})\mathbf{i} + (xz^2\frac{\partial \phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial \phi}{\partial z})\mathbf{j} + (2yz\frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial \phi}{\partial z})\mathbf{k} \\
 &= -(6x^4y^2z^2 + 2xz^2z^2)\mathbf{i} + (4xz^2yz^2 - 12x^2y^2z^2)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^2y^2z^2)\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

المقارنة بالمقدار (د) يوضح النتيجة $(A \times \nabla)\phi = A \times \nabla \phi$

النتائج :

٣٨- نظام إحداثيين متعامدين $x'y'z'$ و xyz لم نفس نقطة الأصل يدوران بالنسبة إلى بعضهم البعض . أشتق معادلات التحويل بين الإحداثيات لنقطة في النظامين .

ليكن x' و y' متجهات الموضع لأي نقطة في نظام الإحداثيات (أنظر شكل ١-٤) إذن حيث $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1)$$

الآن لأي متجه A يكون (مسألة ٢٠ ، الفصل الثاني)

$$A = (A \cdot \mathbf{i}')\mathbf{i}' + (A \cdot \mathbf{j}')\mathbf{j}' + (A \cdot \mathbf{k}')\mathbf{k}'$$

إذن ليكن $A = i_1\mathbf{i} + i_2\mathbf{j} + i_3\mathbf{k}$ على التوالي

$$\begin{cases} i = (i \cdot i') i' + (i \cdot j') j' + (i \cdot k') k' = l_{11} i' + l_{21} j' + l_{31} k' \\ j = (j \cdot i') i' + (j \cdot j') j' + (j \cdot k') k' = l_{12} i' + l_{22} j' + l_{32} k' \\ k = (k \cdot i') i' + (k \cdot j') j' + (k \cdot k') k' = l_{13} i' + l_{23} j' + l_{33} k' \end{cases} \quad (2)$$

بافتراض بالمعادلة (٢) في (١) ومساواة معاملات i', j', k' نجد أن

$$i' = l_{11} i + l_{12} j + l_{13} k, \quad j' = l_{21} i + l_{22} j + l_{23} k, \quad k' = l_{31} i + l_{32} j + l_{33} k \quad (3)$$

وهي معادلات التحويل المطلوبة .

$$\begin{aligned} i' &= l_{11} i + l_{21} j + l_{31} k \\ j' &= l_{12} i + l_{22} j + l_{32} k \\ k' &= l_{13} i + l_{23} j + l_{33} k \end{aligned} \quad \text{٢٤ - أثبت}$$

$$A = (A \cdot i) i + (A \cdot j) j + (A \cdot k) k \quad \text{ليكن } A$$

إذن ليكن $A = i', j', k'$ حل التوال

$$\begin{aligned} i' &= (i' \cdot i) i + (i' \cdot j) j + (i' \cdot k) k = l_{11} i + l_{21} j + l_{31} k \\ j' &= (j' \cdot i) i + (j' \cdot j) j + (j' \cdot k) k = l_{12} i + l_{22} j + l_{32} k \\ k' &= (k' \cdot i) i + (k' \cdot j) j + (k' \cdot k) k = l_{13} i + l_{23} j + l_{33} k \end{aligned}$$

٢٥ - أثبت أن $\sum_{p,q=1}^3 l_{pq} l_{pq} = 1$ if $m=n$, and 0 if $m \neq n$. حيث أن m, n يمكن أن تأخذ أيها من القيم 1, 2, 3

من المعادلات (٢) في المسألة ٢٨ .

$$\begin{aligned} i \cdot i &= 1 = (l_{11} i' + l_{21} j' + l_{31} k') \cdot (l_{11} i' + l_{21} j' + l_{31} k') \\ &= l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= 0 = (l_{11} i' + l_{21} j' + l_{31} k') \cdot (l_{12} i' + l_{22} j' + l_{32} k') \\ &= l_{11} l_{12} + l_{21} l_{22} + l_{31} l_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \cdot k &= 0 = (l_{11} i' + l_{21} j' + l_{31} k') \cdot (l_{13} i' + l_{23} j' + l_{33} k') \\ &= l_{11} l_{13} + l_{21} l_{23} + l_{31} l_{33} \end{aligned}$$

هذه المعادلات تنشئ النتيجة المطلوبة حيث $m=n=1$. باعتبار $i \cdot i, i \cdot j, j \cdot i, j \cdot j, i \cdot k, k \cdot i, k \cdot j$ and $k \cdot k$ يمكن إثبات

النتيجة للقيم $m=2, m=3$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } m=n \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases} \quad \text{يمكن كتابة} \quad \sum_{p,q=1}^3 l_{pq} l_{pq} = \delta_{mn}$$

الرمز δ_{mn} يسمى رموز كرونكتر

٤١ - إذا كانت $\phi(x, y, z)$ كمية عددية ثابتة . بالنسبة للدوران المحاور . أثبت أن التفاضل ϕ يكون متجهها ثابتا تحت هذا الدوران .

من المفروض $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$ والحصول على النتيجة المطلوبة لابد من إثبات أن

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'}$$

باستخدام قانون السلسلة ومعادلات التحول (٣) التي فيها المسألة ٣٨ نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{11} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{21} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{31} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{12} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{22} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{32} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{13} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{23} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{33} \end{aligned}$$

بضرب هذه المعادلات بالكميات k_1, k_2, k_3 على الترتيب والجمع واستخدام مسألة ٣٩ يمكن الحصول على النتيجة المطلوبة .

مسائل متنوعة

٤٢ - إذا كان $\phi = 2xz^2 - x^2y$ أوجد $\nabla \phi$ و $|\nabla \phi|$ عند النقطة $(1, -2, -1)$

الجواب : $2\sqrt{69}, 10k, -4j, -10i$

٤٣ - إذا كان $\phi = 2x - x^2y$ و $\phi = 2xz^2 - x^2y$ أوجد $\nabla \phi$ و $\nabla \times \nabla \phi$

عند النقطة $(1, -1, 1)$ الجواب : $5, 7i - j - 11k$

٤٤ - إذا كان $G = x^2y - xy^2$ و $F = x^2z + e^{yz}$ أوجد $\nabla(F+G)$ و $\nabla(FG)$

عند النقطة $(1, 0, -2)$ الجواب $(1, 0, -2)$ و $(1, 0, -2)$ الجواب $-8j$

٤٥ - أوجد $|\nabla r|^2$ الجواب $3r$

٤٦ - أثبت $\nabla \left(\frac{f(y)}{y} \right) = \frac{f'(y)}{y^2} \mathbf{j}$

٤٧ - أحسب $\nabla \left(\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$ الجواب $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{r^2 + z^2}}) \mathbf{i} - \frac{z}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{z}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$

٤٨ - إذا كان $\nabla U = z^2 \mathbf{e}$ أوجد U الجواب $\frac{z^3}{3} + \text{ثابت}$

٤٩ - أوجد $\phi(r)$ بحيث أن $\nabla\phi = \frac{r}{r^3}$ and $\phi(1) = 0$ الجواب $\phi(r) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r^2})$

٥٠ - أوجد $\nabla\psi$ حيث $\psi = (x^2 + y^2 + z^2)e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ الجواب $(2 - r)e^{-r} \mathbf{r}$

٥١ - إذا كان $\nabla\phi = 2xyz^3 \mathbf{i} + x^2z^3 \mathbf{j} + 3x^2yz^2 \mathbf{k}$ أوجد $\phi(x, y, z)$ إذا كان $\phi(1, -2, 2) = 4$ الجواب $\phi = x^2yz^2 + 20$

٥٢ - إذا كان $\nabla\psi = (y^2 - 2xyz^2) \mathbf{i} + (2 + 2xy - x^2z^2) \mathbf{j} + (2xz^2 - 3x^2yz) \mathbf{k}$ أوجد ψ الجواب ثابت $\psi = xyz^2 - x^2yz^2 + 2y + (2/3)z$

٥٣ - إذا كانت U دالة قابلة للتفاضل عند x, y, z أثبت أن $\nabla U \cdot d\mathbf{r} = dU$

٥٤ - إذا كانت F دالة قابلة للتفاضل عند x, y, z حيث x, y, z دوال قابلة للتفاضل في t أثبت أن

٥٥ - إذا كان \mathbf{A} متجهاً ثابتاً. أثبت $\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}$

٥٦ - إذا كان $A(x, y, z) = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$ بين أن $dA = (\nabla A_1 \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{i} + (\nabla A_2 \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{j} + (\nabla A_3 \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{k}$

٥٧ - أثبت $\nabla(\frac{F}{G}) = \frac{G \nabla F - F \nabla G}{G^2}$ if $G \neq 0$

٥٨ - أوجد وحدة المتجه السوي على سطح الجسم المكافئ الدوراني (الناتج من دوران قطع مكافئ $z = x^2 + y^2$ عند

النقطة $(1, 2, 5)$ الجواب $\frac{2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\pm\sqrt{21}}$

٥٩ - أوجد الوصلة السوية المرسومة على السطح $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8$ الخارج عند النقطة $(3, 1, -4)$

الجواب $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$

٦٠ - أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $xyz = z^2 - 1$ عند النقطة $(1, -3, 2)$

الجواب $2x - y - 3z + 1 = 0$

٦١ - أوجد معادلات المستوى المماس السوي للسطح $z = x^2 + y^2$ عند النقطة $(2, -1, 5)$

الجواب $4x - 2y - z = 5, \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{-1}$ أو $z = 4x + 2, y = -2x - 1, z = -x + 5$

٦٢ - أوجد المشتقة الاتجاهية لـ $\phi = 4xz^2 - 3x^2yz$ عند $(2, -1, 2)$ في اتجاه $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

الجواب $376/7$

٦٣- أوجد المشتقة الاتجاهية لـ $p = 4x^2 - y + z$ عند النقطة $(1, 1, -1)$ في اتجاه النقطة $(-3, 5, 6)$
الإجابة 20/9 -

٦٤- في أي اتجاه من النقطة $(1, 3, 2)$ تكون المشتقة الاتجاهية لـ $z = 2xz - y^2$ أكبر ما يمكن ؟ ما هي قيمة أكبر قيمة ؟
الجواب : في اتجاه المتجه $4i - 8j + 2k$, $2\sqrt{14}$

٦٥- أوجد قيمة التوابت a, b, c بحيث أن المشتقة الاتجاهية لـ $\phi = ax^2y^2 + byz + cz^2x^2$ عند النقطة $(1, 2, -1)$ لها قيمة عظمى تساوي 64 في اتجاه يوازي محور z
الجواب $a = 6, b = 24, c = -8$

٦٦- أوجد الزاوية الحادة بين السطحين $xy^2z = 3x + z^2$ and $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ عند النقطة $(1, -2, 1)$

$$\text{الجواب } \arccos \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{14} = 78^\circ 35'$$

٦٧- أوجد التوابت a, b حيث أن السطح $ax^2 - byz = (a+2)x$ يكون عمودياً على السطح $4xy^2 + z^3 = 4$ عند النقطة $(1, -1, 2)$
الجواب $a = 5/2, b = 1$

٦٨- (أ) ليكن u, v دوال قابلة للتفاضل في x, y, z بين أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون u, v دوال مرتبطة بالمعادلة $F(u, v) = 0$ حيث أن $F(u, v) = 0$ يكون $\nabla u \times \nabla v = 0$.

(ب) بين إذا كان $u = \frac{x+y}{1-xy}$ و $v = \arctan x + \arctan y$ تكون دوال مرتبطة
الجواب (ب) $v = \tan u$

٦٩- (أ) بين أن الشرط اللازم والكافي لأن يكون $w(x, y, z), v(x, y, z), u(x, y, z)$ دوال مرتبطة بالمعادلة

$$\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = 0 \quad \text{وكون} \quad F(u, v, w) = 0$$

(ب) خبر عن $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w$ في صيغة محد. يسمى هذا المحدد الجاكوبيان للكميات u, v, w بالنسبة إلى x, y, z

$$\text{وتكتب كالتالي } J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right) \text{ أو } \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$$

(ج) أوجد إذا كان $w = xy + yz + zx$ و $v = x^2 + y^2 + z^2$ و $u = x + y + z$ تكون دوال مرتبطة

$$\text{الجواب (ب) } \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ج}) \quad \text{وكون } (u^2 - v - 2w = 0)$$

٧٠- إذا كان $\phi = 3xz^2 - yz$ و $A = 3xyz^2i + 2xy^2j - x^2yzk$ أوجد (أ) $\nabla \phi$ (ب) $\nabla \cdot A$

(ج) $\nabla \cdot (\phi A)$ (د) $\nabla \cdot (\nabla \phi)$ عند النقطة $(1, -1, 1)$. الإجابة (أ) 4 (ب) 15 (ج) 1 (د) 6

٧١- احسب $\text{div} (2x^2z\mathbf{i} - xyz\mathbf{j} + 3yz^2\mathbf{k})$ الجواب $4xz - 2xyz + 6yz$

٧٢- إذا كان $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4xz^2y + 2x - 3y - 5$ أوجد $\Delta^2\phi$ الجواب $8z + 24xy - 2z^3 - 6y^2z$

٧٣- احسب $\nabla^2 (\ln r)$ الجواب $1/r^2$

٧٤- أثبت أن $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ حيث n عدد ثابت

٧٥- إذا كان $\mathbf{F} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^2 + y^4)\mathbf{j} - 2x^3z^2\mathbf{k}$ أوجد $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ عند النقطة $(2, -1, 0)$ الإجابة $-6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$

٧٦- إذا كان ω متجهاً ثابتاً $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ أثبت أن $\text{div } \mathbf{v} = 0$

٧٧- أثبت $\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\phi + 2\nabla\phi \cdot \nabla\psi$

٧٨- إذا كان $V = xz^2 - 2y$ احسب $\text{grad}[(\text{grad } V) \cdot (\text{grad } V)]$ الجواب $(6xz^2 - 12x)\mathbf{i} + 6xz^2\mathbf{j} + 12xyz\mathbf{k}$

٧٩- احسب $\nabla \cdot (r^3 \mathbf{r})$ الجواب $6r^2$

٨٠- احسب $\nabla \cdot [r \nabla(1/r^3)]$ الجواب $3/r^4$

٨١- احسب $\nabla^2[\nabla \cdot (r/r^3)]$ الجواب $2/r^5$

٨٢- إذا كان $A = \mathbf{r}/r$ أوجد إختصار الاختلاف لمتجه A الجواب $-2/r^3 \mathbf{r}$

٨٣- أثبت أن (١) $\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}$ (ب) أوجد $f(r)$ بحيث أن $\nabla^2 f(r) = 0$

الجواب $f(r) = A + B/r$ حيث A, B ثوابت اختيارية

٨٤- أثبت أن المتجه $\mathbf{A} = 2yz^2\mathbf{i} + 4xz^2\mathbf{j} - 2x^2z\mathbf{k}$ يكون لولبية

٨٥- بين أن $\mathbf{A} = (2x^2 + 2xyz)\mathbf{i} + (3x^2y - 3xy)\mathbf{j} - (y^2z^2 + 2x^2z)\mathbf{k}$ لا يكون لولبية ولكن $\mathbf{B} = xyz^3\mathbf{A}$ تكون لولبية

٨٦- أوجد كثافة القابلية للتفاضل الأكثر عموماً $f(r)$ بحيث أن $f(r)$ تكون لولبية. الجواب $f(r) = C/r^3$ حيث C عدد اختياري ثابت

٨٧- بين أن المجال المتجهي $\mathbf{v} = \frac{-xz\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ يكون « مجالاً متصبياً » أرمم وأعطى تبديلاً فيزيائياً.

8A- إذا كان V, U مجالين محددين قابليين للتفاضل أثبت أن $\nabla U \times \nabla V$ تكون لولبية

8A- إذا كان $\phi = x^2y$ و $A = 2xz^2i - yzj + 3xz^2k$ أوجد

$$\Delta [A, \text{curl } A] \quad (a) \quad \nabla \times (\nabla \times A) \quad (b) \quad \text{curl}(\phi A) \quad (c) \quad \nabla \cdot A \quad (d)$$

(1, 1, 1) عند النقطة $\text{curl grad}(\phi A) \quad (a)$

$$0 \quad (a) \quad -2i + j + 8k \quad (b) \quad 5i + 3k \quad (c) \quad 5i - 3j - 4k \quad (d) \quad i + j \quad (e) \quad \text{المجواب (1)}$$

9. $\nabla \cdot [\nabla F] \times [\nabla G] \quad (b) \quad \nabla \cdot [(\Delta F), (\nabla G)] \quad (1) \quad \text{أوجد}$ $F = x^2yz, G = xy - 3z^2$ إذا كان

$$\nabla \times [(\nabla F) \times (\nabla G)] \quad (c)$$

$$(2x^2z + 3x^2z - 12xyz)i + (4xyz - 6xz^2)j + (2xy^2 + x^2 - 6xz^2)k \quad (1) \quad \text{الإجابة}$$

$$(x^2z - 24xyz)i - (12x^2z + 2xyz)j + (2xy^2 + 12yz^2 + x^2)k \quad (b) \quad (c)$$

91- أحسب $\nabla \times (r/r^3)$ الإجابة 0

9V- لأي قيمة ثابتة a يكون المتجه $A = (axy - x^2z)i + (a - 2)yzj + (1 - a)zx^2k$ له التفاضل يساوي الصفر ؟

المجواب 4

9F- أثبت أن $\text{curl}(\phi \text{ grad } \phi) = 0$

94- ارسم مجالات المتجه $A = xi + yj$ and $B = yi - xj$ واحسب التفاضل والاتكامل لكل متجه في المجال

والشرح للمنى التيزيائى لنتيجة ائى حصلت عليها .

95- إذا كان $\phi = x^2z^2 - yz^2 + 2xz$ و $A = x^2z^2i + yz^2j - 3xyzk$ أوجد

$$(\nabla \cdot A)B \quad (a) \quad B(A \cdot \nabla) \quad (b) \quad (A \cdot \nabla)B \quad (c) \quad (A \cdot \nabla)\phi \quad (d) \quad A \cdot (\nabla \phi) \quad (e)$$

(1) الإجابة $(4x^2z + yz^2 - 3xyz)i + (4x^2z + yz^2 - 3xyz)j + (4x^2z + yz^2 - 3xyz)k$ (مثل (1))

$$2x^2z^2i + (2xyz - yz^2)j + 2x^2z \quad (c)$$

$$\text{the operator } (x^2yz^2i - x^2yz^2j + 2x^2z) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2x^2i - y^2x^2j + 2xyz^2k) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$+ (-3xyz^2i + 3xyz^2j - 6xyz^2k) \frac{\partial}{\partial z} \quad (a)$$

$$(2xyz^2 + y^2x^2)i - (2xyz^2 + y^2x^2)j + (4x^2z + 2xz^2)k$$

96- إذا كان $\phi = xyz$ و $A = yz^2i - 2xz^2j + 3xyzk$ و $B = 2xi + 4xj - xyzk$ أوجد

$$B \cdot \nabla \times A \quad (a) \quad (\Delta \times A) \times B \quad (b) \quad (A \cdot \nabla)\phi \quad (c) \quad A \cdot (\nabla \phi) \quad (d)$$

(1) الإجابة $-16x^2yz^2i + xy^2z^2j + 4xyz^2k$ (مثل (1))

$$-16x^2yz^2i + xy^2z^2j + 4xyz^2k \quad (b)$$

$$16x^2i + (6x^2yz - 12xyz^2)j + 32x^2z^2k \quad (c) \quad 24x^2z + 4xyz^2 \quad (d)$$

$$4٧ - \text{أوجد } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \text{ and } (\nabla \times \nabla) \times \mathbf{B} \text{ عند النقطة } (1, -1, 2)$$

$$\text{إذا كان } \mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - 3xz\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{B} = 3xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$$

$$\text{الجواب } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 12\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}, (\nabla \times \nabla) \times \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 76\mathbf{k}$$

$$4٨ - \text{أثبت } (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$4٩ - \text{أثبت } \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$50 - \text{أثبت } \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

$$٥١ - \text{أثبت } \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$٥٢ - \text{بين أن } \mathbf{A} = (6xy + x^2)\mathbf{i} + (2x^2 - x)\mathbf{j} + (3xz^2 - y)\mathbf{k} \text{ تكون غير دورانية أوجد } \phi \text{ بحيث أن } \mathbf{A} = \nabla \phi$$

$$\text{الجواب } \phi = 3x^2y + xz^2 - yz + \text{constant}$$

$$٥٣ - \text{بين أن } E = r/r^2 \text{ تكون غير دورانية. أوجد } \phi \text{ بحيث أن } \nabla \phi = -E \text{ حيث } (a) = 0 \text{ عندما } a > 0$$

$$\text{الجواب } \phi = \ln(a/r)$$

$$٥4 - \text{إذا كان } \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ متجهات غير دورانية. أثبت أن } \mathbf{A} \times \mathbf{B} \text{ تكون لولبية.}$$

$$٥٥ - \text{إذا كان } f(r) \text{ قابلة للتفاضل. أثبت أن } f(r)\mathbf{r} \text{ تكون غير دورانية.}$$

$$٥٦ - \text{هل يوجد دالة قابلة للتفاضل } V \text{ بحيث أن } \text{curl } V = \mathbf{r} \text{ (أ) } \text{curl } V = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ (ب) إذا كان ذلك،}$$

$$\text{أوجد } V \text{ الجواب (أ) لا (ب) } V = 2xz\mathbf{j} + (2y-x)\mathbf{k} + \nabla \phi \text{ حيث } \phi \text{ دالة مزدوجة قابلة للتفاضل}$$

اختيارية.

$$٥٧ - \text{بين أن حل معادلة ماكسويل هي}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

حيث ρ دالة في x, y, z و c سرعة الضوء بالرغم أنها ثابتة تطبق بالعلاقة

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

حيث \mathbf{A} و ϕ تسمى جهد المتجه والجهد القوي على الترتيب وتحقق المعادلات

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(r) \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$٥٨ - (1) أعطيت المثال $\phi = 11 + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. احسب $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\phi$ and $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\phi$. (ب) هل يوجد التماس في$$

كتابة $\mathbf{r} \cdot \nabla \phi = 1$ ما هي (ج) مثل $\mathbf{r} \cdot \nabla \phi$ ؟

$$\text{الجواب (أ) } \mathbf{r} \cdot \nabla \phi = 11 + \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ (ب) لا (ج) كرة نصف قطرها واحد ومركزها عند النقطة}$$

الأصل.

١٠٩ - (أ) إذا كان $\mathbf{B} = 2x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ و $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ أحسب المتجه الممكن للكمية $(\mathbf{A} \times \nabla)\mathbf{B}$ عند النقطة $(1, -1, 1)$.

(ب) حل من الممكن كتابة النتيجة في الصورة $\mathbf{A} \times (\nabla\mathbf{B})$ باستخدام التناف؟

الجواب (أ) $-411\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 311\mathbf{k}$ - $11\mathbf{j} - 411\mathbf{i} + 311\mathbf{k}$

(ب) نعم ، إذا كانت العملية قد أدت .

١١٠ - أثبت أن $\phi(x, y, z) = z^2 + y^2 + x^2$ تكون عديداً ثابتاً تحت دوران المحاور .

١١١ - إذا كان $A(x, y, z)$ مجالاً متجهياً قابل للتفاضل ثابتاً بالنسبة لدوران المحاور . أثبت أن $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ و $\text{div } \mathbf{A}$ و $\text{curl } \mathbf{A}$ يكونوا ثوابت مجال عديداً وثوابت مجال متجهي على الترتيب تحت التحويل .

١١٢ - حل المعادلات (٣) للمعادلات المحلولة ٣٨ لقيم x, y, z بدلالة x', y', z'

$$\text{الجواب } x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad z' = z$$

١١٣ - إذا كان \mathbf{A} و \mathbf{B} ثوابت تحت تأثير الدوران بين أن $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ يكونوا أيضاً ثوابت

١١٤ - بين أنه تحت تأثير الدوران

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{i}' \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j}' \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial z'} = \nabla'$$

١١٥ - بين أن عامل لابلاس يكون ثابت تحت تأثير الدوران .

الفصل الخامس

تكامل المتجه

التكاملات المادية للمتجهات : ليكن $R(u) = R_1(u)i + R_2(u)j + R_3(u)k$ متجه يتوقف على كمية عددية فردية متغيرة u حيث $R_1(u), R_2(u), R_3(u)$.

اقترب انشباً مستمرة في فترة معينة . إذن

$$\int_a^b R(u) du = i \int_a^b R_1(u) du + j \int_a^b R_2(u) du + k \int_a^b R_3(u) du$$

يسمى تكامل غير محدد لمتجه $R(u)$. إذا وجد متجه $S(u)$ بحيث أن $S'(u) = R(u)$ ، حينئذ

$$\int_a^b R(u) du = \int_a^b \frac{d}{du}(S(u)) du = S(u) + c$$

حيث c متجه ثابت اختياري غير متوقف على u .

التكامل المحدد بين النهايات a و b يمكن كتابته في هذه الحالة كالآتي :

$$\int_a^b R(u) du = \int_a^b \frac{d}{du}(S(u)) du = S(u) + c \Big|_a^b = S(b) - S(a)$$

هذا التكامل يمكن أيضاً تعريفه كنهاية لمجموع بطريقة مشابهة لما هو في حالة حساب التكامل الايتاني .

التكاملات الخطية : ليكن $r(u) = x(u)i + y(u)j + z(u)k$ حيث $r(u)$ متجه موصي له (x, y, z) المعروف لمنحنى C الذي يصل النقطتين P_1 ، P_2 حيث $u = u_1$ ، $u = u_2$ على الترتيب .

نفترض أن C تتكون من عدد محدد من المنحنيات وكل منها له المتجه $r(u)$ وله مشتقة مستمرة .

ليكن $A(x, y, z) = A_1i + A_2j + A_3k$ دالة متجه لموضع محدد ومستمر على طول C . حينئذ يكون التكامل المركبة المناسبة للمتجه A على طول C من النقطة P_1 إلى P_2 يكتب كالآتي :

$$\int_{P_1}^{P_2} A \cdot dr = \int_a^b A \cdot dr = \int_a^b A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

هذا مثال التكامل الخطي . إذا كانت A هي القوة F المؤثرة على جسم يتحرك على C . هذا التكامل الخطي يمثل العمل المبذول بهذه القوة . إذا كانت C منحنى مغلق (حيث نفترض أنه منحنى مغلق بسيط أي أن المنحنى لا يقطع نفسه ، في أي مكان) التكامل حول C أحياناً يبين كالآتي :

$$\oint A \cdot dr = \oint A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

في ديناميكا الطيران وميكانيكا الموائع هذا التكامل يسمى دوران المتجه A على C حيث A تمثل سرعة المائع .

وعموماً أى تكامل يراد حسابه على طول منحنى يسمى تكامل خطياً . مثل هذه التكاملات يمكن تعريفها بدلالة نهايات مجاميع (Sums) كما في حساب التكاملات الأولية .

لنطرق حساب التكاملات الخطية أنظر المسائل المحلولة .

النظرية الآتية عامة :

نظرية : إذا كان $A = \nabla \phi$ في أى منطقة R في الفراغ ، معرفة بالفترات $a_1 \leq x \leq a_2$ ، $b_1 \leq y \leq b_2$ ، $c_1 \leq z \leq c_2$ حيث $\phi(x, y, z)$ وحيطة للقسمة ولها مشتقة مستمرة في R سينتج .

$$\int_{P_1}^{P_2} A \cdot dr = 0$$

$$\oint_C A \cdot dr = 0$$

في مثل هذه الحالة A تسمى مجالاً متحفظاً وأن ϕ هي الجهد المبدى .

مجال المتجه A يكون متحفظاً إذا كان $\nabla \times A = 0$ أو معادلاً $A = \nabla \phi$. في مثل هذه الحالة $A \cdot dr = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = d\phi$. أنظر مسائل ١٠-١٤ .

تكاملات السطح : ليكن S سطح له جانبان كما مبين في شكل ١-٥ . ليكن أحد جوانب السطح S اعتبر كجانب موجب (إذا كان S سطح مغلق وقد أخذ على أنه الجانب الخارجى) . الوحدة العمودية \hat{n} إلى أى نقطة للجانب الموجب السطح S تسمى الوحدة العمودية الموجبة أو الوحدة العمودية المرسومة للخارج .

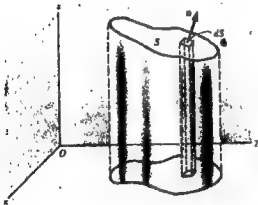
ربط هذا بتفاضل مساحة سطح dS متجه $d\vec{S}$ الذى له المقدار dS وله نفس اتجاه \hat{n} حيث $d\vec{S} = \hat{n} dS$. التكامل

$$\iint_S A \cdot d\vec{S} = \iint_S A \cdot \hat{n} dS$$

كثا لتكامل السطح ويسمى تدفق (flux) المتجه A فوق S . تكاملات أخرى سطحية .

$$\iint_S \phi dS, \iint_S \phi \hat{n} dS, \iint_S A \times d\vec{S}$$

حيث ϕ تكون دالة جديده . مثل هذه التكاملات يمكن تعريفها بدلالة نهايات مجاميع كما في حالة التكاملات الأولية (أنظر المسألة ١٧) .



شكل ١-٥

الرمز \oint في بعض الأحيان يستعمل لتبين التكامل على السطح المغلق S . كى يمنع أى تداخل في التعريف \oint الذى يمكن أيضاً استعماله .

حساب تكاملات السطح . يكون من الملائم التعبير عنها كتكامل ثنائي مأخوذ على المساحة المشغلة السطح S على أحد مستويات الإحداثيات . هذا يمكن لو أن أي عطا متبادلاً على مستوى الإحداثيات يلاق السطح في نقطة واحدة . على كل حال فهذا لا يمثل مشكلة حقيقية حيث يمكن عموماً تقسيم السطح S إلى أسطح تحقق هذا التصديق .

تكاملات الحجم : اعتبر سطحاً مغلقاً في الفراغ يحتوي حجم V حيزه

$$\iiint_V A \, dV \quad \text{and} \quad \iiint_V \phi \, dV$$

أشغلة من تكاملات الحجم أو تكاملات الفراغ كما تسمى في بعض الأحيان لحساب مثل هذه التكاملات أنظر المسائل المحلولة .

مسائل محلولة

$$1 - \text{إذا كان } R(u) = (u-u^2) + 2u^2 + 3u^3 - 4u^4 \text{ أوجد } \int_1^2 R(u) \, du \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(u) \, du &= \int_1^2 [(u-u^2) + 2u^2 + 3u^3 - 4u^4] \, du \\ &= \int_1^2 (u-u^2) \, du + \int_1^2 2u^2 \, du + \int_1^2 3u^3 \, du - \int_1^2 4u^4 \, du \\ &= \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + c_1 \right]_1^2 + \left[\frac{2u^3}{3} + c_2 \right]_1^2 + \left[\frac{3u^4}{4} + c_3 \right]_1^2 - \left[\frac{4u^5}{5} + c_4 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{4 \cdot 2^5}{5} - \frac{4 \cdot 1^5}{5} \right) + c_1 + c_2 + c_3 - c_4 \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{4 \cdot 2^5}{5} - \frac{4 \cdot 1^5}{5} \right) + c \end{aligned}$$

حيث $c = c_1 + c_2 + c_3 - c_4$ ثابت

(ب) من (1)

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(u) \, du &= \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{2u^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{3u^4}{4} \right]_1^2 - \left[\frac{4u^5}{5} \right]_1^2 + c \\ &= \left[\left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) - \left(\frac{4 \cdot 2^5}{5} - \frac{4 \cdot 1^5}{5} \right) \right] + c \\ &= -\frac{5}{6} + \frac{16}{3} - 2k \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(u) \, du &= \int_1^2 (u-u^2) \, du + \int_1^2 2u^2 \, du + \int_1^2 3u^3 \, du - \int_1^2 4u^4 \, du \\ &= \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{2u^3}{3} \right]_1^2 + \left[\frac{3u^4}{4} \right]_1^2 - \left[\frac{4u^5}{5} \right]_1^2 = -\frac{5}{6} + \frac{16}{3} - 2k \end{aligned}$$

٢ - عجلة جسم عند أي زمن $t \geq 0$ تعطى بالمعادلة

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 \cos 2t \, i - 8 \sin 2t \, j + 16t \, k$$

إذا كانت السرعة v والإزاحة r هما صفر عند $t = 0$ لوجد v و r عند أي زمن .

$$\begin{aligned} v &= i \int 12 \cos 2t \, dt + j \int -8 \sin 2t \, dt + k \int 16t \, dt \quad \text{كامل} \\ &= 6 \sin 2t \, i + 4 \cos 2t \, j + 8t^2 k + c_1 \end{aligned}$$

بوضع $v = 0$ عندما $t = 0$ نجد أن $c_1 = -4j$ و $c_2 = 0i + 4j + 0k + c_2$

$$v = 6 \sin 2t \, i + (4 \cos 2t - 4) j + 8t^2 k$$

$$\frac{dv}{dt} = 12 \sin 2t \, i + (4 \cos 2t - 4) j + 16t k \quad \text{لذلك}$$

$$\begin{aligned} r &= i \int 6 \sin 2t \, dt + j \int (4 \cos 2t - 4) \, dt + k \int 16t^2 \, dt \quad \text{كامل} \\ &= -3 \cos 2t \, i + (2 \sin 2t - 4t) j + \frac{16}{3} t^3 k + c_2 \end{aligned}$$

نضع $r = 0$ عندما $t = 0$

$$0 = -3i + 0j + 0k + c_2 \quad \text{و} \quad c_2 = 3i$$

$$r = (3 - 3 \cos 2t) i + (2 \sin 2t - 4t) j + \frac{16}{3} t^3 k \quad \text{حيث}$$

$$r = A \times \frac{d^2 A}{dt^2} \, dt \quad \text{احسب}$$

$$\frac{d}{dt} (A \times \frac{dA}{dt}) = A \times \frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{dA}{dt} \times \frac{dA}{dt} = A \times \frac{d^2 A}{dt^2}$$

$$\int A \times \frac{d^2 A}{dt^2} \, dt = \int \frac{d}{dt} (A \times \frac{dA}{dt}) \, dt = A \times \frac{dA}{dt} + c \quad \text{كامل}$$

٤ - معادلة الحركة لجسم P كتلته m تعطى بالمعادلة

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = f(t) r_1$$

حيث r هو المتجه الموضعي لجسم P مقاس من نقطة الأصل O و r_1 وحدة متجه في اتجاه r و $f(t)$ دالة المسافة الجسم P من O

(أ) بين أن $r \times \frac{dr}{dt} = c$ حيث c متجه ثابت .

(ب) علل فيزيائياً الحالات $f(t) < 0$ و $f(t) > 0$

(ج) علل نتيجة (أ) هندسياً

(د) أذكر كيف تفصل حل النتائج التي تربط حركة الكواكب في مجموعتنا الشمسية .

$$(أ) \text{ أضرب كلا من الجانبين بـ } f(t) r_1 = f(t) \frac{dr}{dt} \text{ و } r \text{ حيث}$$

$$m r \times \frac{d^2 r}{dt^2} = f(t) r \times r_1 = 0$$

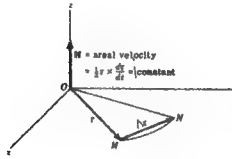
حيث r و r_1 متجهات تقع في نفس المستوى وأيضاً $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = 0$ لذلك

$$r \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt} \left(r \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0$$

كامل $r \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = c$ حيث c متجه ثابت (قانون بولسايت).

(ب) إذا كان $f(r) < 0$ فالعجلة $d^2 \mathbf{r}/dt^2$ لها الاتجاه العاكس لمتجه \mathbf{r}_1 حيث تكون القوة في اتجاه O والجسم يكون دائماً منجذب في اتجاه O ...

إذا كان $f(r) > 0$ دائماً تكون القوة متجهة بعيداً عن O والجسم يكون تحت تأثير القوة التنافرية عند O القوة المتجهة إلى أو بعيداً عن نقطة ثابتة O ولها المقدار المتوقف فقط على المسافة r من O تسمى قوة مركزية.



شكل - ٥

(ج) في زمن Δt يتحرك الجسم من M إلى N

(شكل ٥) المساحة المغطاة خارجياً بمتجه الموضع لهذا الزمن تقريباً تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع الذي جوانبه \mathbf{r} و $\Delta \mathbf{r}$ أو $\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}$ حيث المساحة التقريبية المغطاة خارجياً بمتجه نصف القطر لكل وحدة زمن هو $\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r} / \Delta t$ حيث Δt الزمن المغطى لمدل التغير في المساحة يكون

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

حيث \mathbf{v} هي السرعة الخطية للجسم

التي $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ تسمى السرعة المساحية من الجزء (أ)

$$\text{السرعة المساحية} = \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \text{ثابت}$$

حيث $\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = 0$ تأخذ الحركة مكانها في المستوى الذي يمكن أن يكون المستوى xy كما بشكل ٥-٢.

(د) كوكب (مثل كوكب الأرض) ينجذب إلى الشمس تبعاً لقانون نيوتن العام للجاذبية ، والذي يذكر أن أي جسمين

ذو كتل m و M على الترتيب يخضعان كل منهما للقوة بمقدارها $F = \frac{GMm}{r^2}$ حيث r هي المسافة بين الجسمين و G ثابت عام . ليكن m ، M كتل الكواكب و \mathbf{r} متجه من الكوكب M إلى الكوكب m . ثم أغفر مجموعة محاور إحداثيات بحيث أن نقطة الأصل O تكون عند الشمس . إذن معادلة حركة الكوكب هي

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{أو} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

يفرض أن تأثير الكواكب الأخرى مهملة .

تبعا للجزء (د) كوكب يتحرك حول الشمس بحيث أن متجه الموضع يحتاز مساحات متساوية في أزمنة متساوية . هذه النتيجة والمسألة هي اثنان من ثلاثة قوانين مشهورة لكبلر والتي استنتجت عليها من مجموعة

من المعلومات التي جمعت ووضعت بواسطة العالم الفلكي بتكويرا هو . هذه القوانين جعلت لنبوت قادرا على صياغة قانونه العام الجاذبية . لحركة قانون كبلر الثالث أنظر مسألة ٣٦ .

٥ - بين أن مدار الكوكب حول الشمس يكون في قطع ناقص والشمس تكون عند إحدى البؤرتين .

من مسائل ٤ ، ٤ ، ٤ .

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}_1$$

$$r \times v = 2h = h \quad (1)$$

$$\text{الآن } \dot{r} = r \hat{r}_1, \quad \frac{dv}{dt} = r \frac{d\hat{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt} \hat{r}_1 \quad \text{بحيث أن} \quad (2)$$

$$h = r \times v = r \hat{r}_1 \times (r \frac{d\hat{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt} \hat{r}_1) = r^2 \hat{r}_1 \times \frac{d\hat{r}_1}{dt} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} \times h &= -\frac{GM}{r^2} \hat{r}_1 \times h = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}_1 \times (r \hat{r}_1 \times \frac{d\hat{r}_1}{dt}) \\ &= -GM \left[(\hat{r}_1 \cdot \frac{d\hat{r}_1}{dt}) \hat{r}_1 - (\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_1) \frac{d\hat{r}_1}{dt} \right] = GM \frac{d\hat{r}_1}{dt} \end{aligned} \quad (1) \text{ من}$$

باستعمال المعادلة ٣ والحقيقة أن $\hat{r}_1 \cdot d\hat{r}_1/dt = 0$ (مسألة ٩ جزء ٢) .

ولكن حيث h موجبة ثابت $\frac{dv}{dt} \times h = \frac{dh}{dt} (v \times h)$ بحيث أن

$$\frac{dh}{dt} (v \times h) = -GM \frac{d\hat{r}_1}{dt}$$

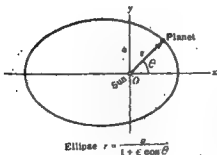
$$v \times h = GM \hat{r}_1 + p \quad \text{كل}$$

$$\begin{aligned} r \cdot (v \times h) &= GM r \cdot \hat{r}_1 + r \cdot p \\ &= GM r + r p \cos \theta \end{aligned} \quad \text{ونبأ}$$

حيث p موجبة ثابت انحرافه والمقدار θ بين \hat{r}_1 و p .

$$r \cdot (v \times h) = (r \times v) \cdot h = h \cdot h = h^2, \text{ we have } h^2 = GM r + r p \cos \theta \text{ حيث}$$

$$r = \frac{h^2}{GM + p \cos \theta} = \frac{h^2/GM}{1 + (p/GM) \cos \theta}$$



شكل ٣

من الهندسة التحليلية المعادلة القطبية لقطع مخروطي التي بؤرتها عند

$$\text{نقطة الأصل غير مركزية بالمقدار } e \text{ هي } r = \frac{a}{1 + e \cos \theta}$$

حيث e مقدار ثابت . فلنر هذا مع المعادلة المستخرجة يلاحظ أن الفلك (المقدار) المطلوب هو قطع مخروطي مع لا مركزية $p/GM = e$ يكون المدار عبارة عن قطع ناقص أو مكافئ أو زائحه تماما $e \leq 1$ أقل من أو تساوى أو أكبر من الواحد . حيث أن المعلومات الكوكبية تكون لها منحنيات مغلقة فلا بد أن تكون قطع ناقصا .

تكميلات الخط :

٦ - إذا كان $A = (3x^2 + 6y)z - 14yz + 20xz^2$ حسب $A \cdot dr$ من النقطة $(0, 0, 0)$ إلى $(1, 1, 1)$ على المسارات C الآتية :

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \quad (1)$$

(ب) الخطوط المستقيمة من $(0, 0, 0)$ إلى $(1, 1, 1)$ ثم إلى $(1, 1, 0)$ و ثم إلى $(1, 1, 1)$.

(ج) الخط المستقيم الذي يربط $(0, 0, 0)$ و $(1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \int_C A \cdot dr &= \int_C [(3x^2 + 6y)z - 14yz + 20xz^2] \cdot (dx + dy + dz) \\ &= \int_C (3x^2 + 6y)z \, dx - 14yz \, dy + 20xz^2 \, dz \end{aligned}$$

(١) إذا كان $x = t, y = t^2, z = t^3$ عند النقطة $(0, 0, 0)$ و $(1, 1, 1)$ المنطق : $t = 0$ و $t = 1$ بالتالي حينئذ

$$\begin{aligned} \int_C A \cdot dr &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t^2)t^3 \, dt - 14(t^2)(t^3) \, d(t^2) + 20(t)(t^3)^2 \, d(t^3) \\ &= \int_{t=0}^1 9t^5 \, dt - 28t^5 \, dt + 60t^5 \, dt \\ &= \int_{t=0}^1 (9t^5 - 28t^5 + 60t^5) \, dt = 3t^6 - 4t^6 + 6t^6 \Big|_0^1 = 5 \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

على طول $C, A = 9t^5 - 14t^5 + 20t^5$ و $dr = (1 + 2t + 3t^2)dt$

$$\begin{aligned} \int_C A \cdot dr &= \int_{t=0}^1 (9t^5 - 14t^5 + 20t^5) \cdot (1 + 2t + 3t^2) \, dt \\ &= \int_0^1 (9t^5 - 28t^5 + 60t^5) \, dt = 5 \end{aligned}$$

(ب) على طول الخط المستقيم من $(0, 0, 0)$ إلى $(1, 0, 0)$ تكون $dy = 0, dz = 0$ و x يتغير من 0 إلى 1 إذن التكامل على هذا الجزء من المسار يكون

$$\int_{x=0}^1 (3x^2 + 6(0))x \, dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0) = \int_{x=0}^1 3x^3 \, dx = x^4 \Big|_0^1 = 1$$

على طول الخط المستقيم $(1, 0, 0)$ إلى $(1, 1, 0)$ $x = 1, z = 0, dx = 0, dz = 0$ و y يتغير من 0 إلى 1. إذن التكامل على هذا الجزء من المسار يكون

$$\int_{y=0}^1 (3(1)^2 + 6y)0 - 14y(0) \, dy + 20(1)(0)^2 \, 0 = 0$$

على الخط المستقيم من $(1, 1, 0)$ إلى $(1, 1, 1)$ و $x = 1$ و $y = 1$ و $dx = 0$ و $dy = 0$.
يؤخذ z تتغير من 0 إلى 1 . حيث التكامل على هذا الجزء من المسار هو

$$\int_{z=0}^1 (3(1)^2 + 6(1)) dz = 14(1)z(0) + 20(1)z^2 dz = \int_{z=0}^1 20z^2 dz = \frac{20z^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{20}{3}$$

$$\int_C A \cdot dr = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3} \quad \text{بالجمع}$$

(ج) الخط المستقيم الذي يربط $(0, 0, 0)$ و $(1, 1, 1)$ الخط في الصيغة البارامترية بواسطة $z = t$ و $y = t$ و $x = t$. حيث

$$\begin{aligned} \int_C A \cdot dr &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t) dt = 14(t)(t) dt + 20(t)(t)^2 dt \\ &= \int_{t=0}^1 (3t^2 + 6t + 14t^2 + 20t^3) dt = \int_{t=0}^1 (6t + 11t^2 + 20t^3) dt = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

٧ - أوجد شغل الكتل المبثوث في تحريك جسم في مجال قوة معطى بالمعادلة $W = 3xyi - 5zj + 10xk$ على طول المنحنى $t = 2$ إلى $t = 1$ من $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^2$

الشغل الكلي

$$\begin{aligned} \int_C W \cdot dr &= \int_0^2 (3xyi - 5zj + 10xk) \cdot (dx i + dy j + dz k) \\ &= \int_0^2 3xy dx - 5z dy + 10x dz \\ &= \int_0^2 3(t^2+1)(2t^2) d(t^2+1) - 5(t^2) d(2t^2) + 10(t^2+1) d(t^2) \\ &= \int_0^2 (12t^4 + 10t^6 + 12t^2 + 30t^2) dt = 303 \end{aligned}$$

٨ - إذا كان $W = 3xyi - z^2j + 10xk$ احسب $\int_C W \cdot dr$ حيث C منحنى في المستوى xy ، $y = 2x^2$ من $(0, 0)$ إلى $(1, 2)$.

حيث أن التكامل المتكامل في المستوى xy عند $(z = 0)$ يمكننا أن نأخذ $z = x + y$ حيث

$$\begin{aligned} \int_C W \cdot dr &= \int_0^1 (3xyi - y^2j) \cdot (dx i + dy j) \\ &= \int_0^1 3xy dx - y^2 dy \end{aligned}$$

الطريقة الأولى : - ليكن $t = x$ في $y = 2x^2$ حيث المعادلات البارامترية الخاصة C تكون $x = t$ و $y = 2t^2$.
نأخذ $(1, 2)$ و $(0, 0)$ متناظرة لـ $t = 0$ و $t = 1$ على الترتيب حيث

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^1 3(t)(2t^2) dt = (2t^3)^2 \Big|_0^1 = \int_{t=0}^1 (6t^3 - 16t^5) dt = -\frac{7}{6}$$

الطريقة الثانية : بالتعويض $z = 2x^2$ مباشرة ، حيث x تنبر من 0 إلى 1 إذن

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x=0}^1 3x(2x^2) dx - (2x^2)^2 d(2x^2) = \int_{x=0}^1 (6x^3 - 16x^5) dx = -\frac{7}{6}$$

لاحظ إذن تحرك المنحنى في الاتجاه العاكس . أى أن من $(1, 2)$ إلى $(0, 0)$ فإن قيمة التكامل يمكن أن يكون $7/6$ بدلاً من $-7/6$.

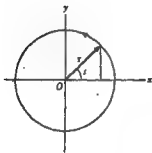
٩ - أوجد التمثيل المجهول لتحريك جسم مرة واحدة حول الدائرة C في المستوى xy . إذا كان مركز الدائرة عند نقطة الأصل ونصف قطرها 3 ، وإذا كانت قوة الجهد المطبقة هي

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

في المستوى $z = 0$ و $dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ و $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ **النك يكون**
الشغل المنجز

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_C [(2x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (3x-2y)\mathbf{k}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}] \\ &= \int_C (2x-y) dx + (x+y) dy\end{aligned}$$

أختر المعادلات البارامترية للدائرة التي هي $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$ حيث t تتغير من 0 إلى 2π شكل 2-5 حيث t يغطي التكاملاً الخطي يساوي



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$= 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$$

شكل ٤-٤

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [2(3 \cos t) - 3 \sin t] [-3 \sin t] dt + [3 \cos t + 3 \sin t] [3 \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (9 - 9 \sin t \cos t) dt = 9t - \frac{9}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} = 18\pi \end{aligned}$$

في محرك C اختير اتجاه عكس عقارب الساعة كما في شكل ١٠-٤ ملسي هذا الاتجاه موجبا أو نقول ان C قد تحركت إلى الاتجاه الموجب ، إذا كانت C تحركت إلى اتجاه عقارب الساعة الاتجاه (السالبي) قيمة التكامل سوف تكون (18 -).

١- (١) إذا كانت $\nabla\phi = 0$ حيث ϕ قيمة فريدة ولها مشتقات جزئية مستمرة. فإن أن الشغل المبذول في تحريك الجسم من نقطة واحدة $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ إلى نقطة أخرى $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ غير متوقفة على المسار الذي يربط بين النقطتين.

(ب) بالعكس إذا كانت $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ هي غير متغيرة على المسار C الذي يربط أي نقطتين - فإن أنه يوجد حقل $\mathbf{F} = \nabla \phi$ على ϕ .

(1) الشكل المبين

$$\begin{aligned}
 &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k \right) \cdot (dx i + dy j + dz k) \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)
 \end{aligned}$$

حيث يتوقف التكامل فقط على النقط P_1 ، P_2 وليس على المسار الذي يربط بينهما . بالطبع هذه حقيقة فقط إذا كانت $\phi(x, y, z)$ هي قيمة دالة متكامل للنقط P_1 ، P_2 .

(ب) لكن $\mathbf{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k$ من الفرض غير متوقفة على مسار C الذي يربط أي نقطتين . ولذا نأخذ على أنها (x_1, y_1, z_1) و (x, y, z) بالانتقال . حيث

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, z) &= \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\
 &\text{لذا } (x, y, z) \text{ و } (x_1, y_1, z_1) \text{ غير متوقفة على مسار يربط}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) &= \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x+\Delta x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\
 &= \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} F_1 dx = \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz
 \end{aligned}$$

حيث أن التكامل الأخير لابد أن يكون غير متوقف على مسار يربط النقطتين (x, y, z) و $(x+\Delta x, y, z)$ يمكننا اختيار المسار ليكون خطاً مستقيماً يربط تلك النقط بحيث أن dx و dy تكونان صفرية . حيث

$$\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} F_1 dx$$

مع أخذ النهايات لكلا الطرفين عندما $\Delta x \rightarrow 0$ يكون لدينا

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2$$

$$\mathbf{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k = \nabla \phi$$

إذا كان $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ غير متوقفة على المسار C الذي يربط P_1 و P_2 حيث \mathbf{F} تسمى المجال الصفلي وأنها تتبع الآتي إذا كان $\mathbf{F} = \nabla\phi$ حيث \mathbf{F} تكون تحفظية وعكسية .

برهن باستخدام الموجهات . إذا كان تكامل الخط غير متوقف على المسار . إذا

$$\phi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} ds$$

$$\text{بالتفاضل} \quad \frac{d\phi}{ds} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} \quad \text{ولكن} \quad \frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} \quad \text{لذلك} \quad (\nabla\phi - \mathbf{F}) \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} = 0$$

حيث هذا صحيح بغض النظر عن $d\mathbf{s}/ds$ لدينا $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

١١- (١) إذا كان \mathbf{F} مجالاً تحفظياً أثبت أن $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$ (أي أن \mathbf{F} غير دورانية) .

(ب) عكسياً إذا كان $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ (حيث \mathbf{F} غير دورانية) أثبت أن \mathbf{F} تكون تحفظية

(١) إذا كان \mathbf{F} مجالاً تحفظياً حيث باستخدام المسألة ١٠ $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

لذا $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = 0$ (أنظر مسألة ١٢٧) (الفصل الرابع) .

$$(ب) \quad \text{إذا كان } \nabla \times \mathbf{F} = 0 \text{ حيث } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \text{ وذلك} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

لا بد من إثبات أن $\mathbf{F} = \nabla\phi$ يأتي كنتيجة لذلك .

الشغل المبذول في تحريك جسم من النقطة (x_1, y_1, z_1) إلى النقطة (x, y, z) في مجال القوة \mathbf{F} يكون

$$\int_C F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

حيث C المسار الذي يربط بين (x_1, y_1, z_1) و (x, y, z) دعنا نختار مساراً خاصاً أجزاء من الخط المستقيم من (x, y, z) إلى (x_1, y_1, z_1) إلى (x, y, z) ونسمي المسار $\phi(x, y, z)$ الشغل المبذول على طول هذا المسار الخاص . إذن

$$\phi(x, y, z) = \int_{x_1}^x F_1(x, y, z) dx + \int_{y_1}^y F_2(x, y, z) dy + \int_{z_1}^z F_3(x, y, z) dz$$

وأنه لذلك يتبع

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_3(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= F_2(x, y, z) + \int_{x_1}^x \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) dx \\ &= F_2(x, y, z) + \int_{x_1}^x \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) dz \\ &= F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) \Big|_{x_1}^x = F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) - F_3(x, y, z) = F_2(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= F_1(x, y, z) + \int_{y_1}^y \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) dy + \int_{x_1}^x \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) dx \\ &= F_1(x, y, z) + \int_{y_1}^y \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) dy + \int_{x_1}^x \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) dx \\ &= F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) \Big|_{y_1}^y + F_3(x, y, z) \Big|_{x_1}^x \\ &= F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) - F_2(x, y_1, z) + F_3(x, y, z) - F_3(x, y, z) = F_1(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla \phi$$

لذلك نلاحظ الشرط الضروري والكافي لأن يكون المجال F تحفظي هو أن $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$

١٧- (١) بين أن $\mathbf{F} = (2xy + z^2)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ يكون مجال قوة تحفظي . (ب) أوجد الجهد العنصر

(ج) أوجد الشكل المبدئي في تحريك جسم في هذا المجال من $(1, -2, 1)$ إلى $(3, 1, 4)$.

(١) من المسألة ١١ الشرط اللازم والكافي لأن تكون القوة تحفظية هو $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{الآن}$$

لذلك \mathbf{F} هو مجال قوة تحفظي

(ب) طريقة أولى :

$$\text{من المسألة ١١} \quad \mathbf{F} = \nabla \phi \quad \text{أي} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = (2xy + z^2)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xz^2 \quad (١) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \quad (٢) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2xy + z^2 \quad (٣)$$

بالتكامل ، نجد من ١ ، ٢ ، ٣ على الترتيب أن :

$$\begin{aligned}\phi &= x^2 y + xz^2 + f(y, z) \\ \phi &= x^2 y + g(x, z) \\ \phi &= x^2 y + h(x, y)\end{aligned}$$

وهذا يتفق إذا اخترنا $x^2 y$ ، $h(x, y) = x^2 y$ ، $g(x, z) = xz^2$ ، $f(y, z) = 0$ ، لذلك $\phi = x^2 y + xz^2$ التي يمكن إضافة أي ثابت إليها .

طريقة ثانية :

حيث R تكون تحفظية ، $\int_R \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ غير متوقفة على المسار C الذي يربط بين (x_1, y_1, z_1) و (x, y, z) .
باستعمال طريقة المسألة (١١ ب) .

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \int_{x_1}^x (2xy + z^2) dx + \int_{y_1}^y x^2 dy + \int_{z_1}^z 2xz^2 dz \\ &= (x^2 y + xz^2) \Big|_{x_1}^x + x^2 y \Big|_{y_1}^y + xz^3 \Big|_{z_1}^z \\ &= x^2 y_2 + xz_2^3 - x_1^2 y_1 - x_1 z_1^3 + x^2 y - x^2 y_1 + xz^3 - xz_1^3 \\ &= x^2 y + xz^3 - x_1^2 y_1 - x_1 z_1^3 = x^2 y + xz^3 \quad \text{لأنه}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = d\phi \quad \text{طريقة ثالثة :}$$

حيث

$$\begin{aligned}d\phi &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (2xy + z^2) dx + x^2 dy + 2xz^2 dz \\ &= (2xy dx + x^2 dy) + (z^2 dx + 2xz^2 dz) \\ &= d(x^2 y) + d(xz^3) = d(x^2 y + xz^3)\end{aligned}$$

$$\phi = x^2 y + xz^3 \quad \text{ولأنه}$$

(٢) الشغل المبذول

$$\begin{aligned}&= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{P_1}^{P_2} (2xy + z^2) dx + x^2 dy + 2xz^2 dz \\ &= \int_{P_1}^{P_2} d(x^2 y + xz^3) = x^2 y + xz^3 \Big|_{P_1}^{P_2} = x^2 y + xz^3 \Big|_{(1, -2, 1)}^{(2, 1, 4)} = 202\end{aligned}$$

طريقة أخرى :

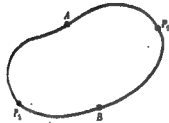
$$\phi(x, y, z) = x^2y + yz^2 + \text{constant} \quad (\text{ب})$$

$$= \phi(3, 1, 4) - \phi(1, -2, 1) = 302. = \text{حيثما الشغل المبذول}$$

١٧- أثبت أنه إذا كان $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ غير متوقفة على مسار ربط أي نقطتين P_1 و P_2 في منطقة معطوية ، إذن

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{لكل المسارات المغلقة في المنطقة وبالعكس}.$$

ليكن AP_1BP_2 منحنى مغلق (شكل ٥-٥) . حيثما



$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \end{aligned}$$

حيث أن التكامل من P_1 إلى P_2 على طول المسار خلال A ، على ذلك على طول المسار من B من الفرض .

وبالعكس إذا كان $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ إذن

$$\begin{aligned} \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \\ \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{لذلك} \end{aligned}$$

١٤- (أ) بين أن المبرط اللازم ولكان لكي يكون $P_1 dx + P_2 dy + P_3 dz$ تفاضلياً مضبوطاً هو أن يكون $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ حيث $\mathbf{F} = P_1 \mathbf{i} + P_2 \mathbf{j} + P_3 \mathbf{k}$.

(ب) بين أن $(y^2z^2 \sin x - 4xz^2) dx + 2x^2y \sin x dy + (3y^2z^2 \sin x - x^2) dz$ تكون تفاضلياً مضبوطاً في الدالة ϕ وأوجد ϕ .

(١) افترض $P_1 dx + P_2 dy + P_3 dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$ معادلة تفاضلية مضبوطة . حيث أن x, y, z متغيرات غير مستقلة . إذن

$$P_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad P_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad P_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\text{حيثما } \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad \text{مكلاً} \quad \nabla \times \mathbf{F} = P_3 \mathbf{i} + P_2 \mathbf{j} + P_1 \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = 0 \quad \text{ولذا}$$

عكسيا إذا كان $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ حيث من المألوف ١١ : $\mathbf{F} = \nabla \phi$ ، ولذا $d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$ ، $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\phi$ ، أي أن ϕ دالة تكامل مضبوط .

(ب) $\mathbf{F} = (y^2 z^3 \cos x - 4xz^3) \mathbf{i} + 2xy \sin x \mathbf{j} + (3y^2 z^2 \sin x - x^4) \mathbf{k}$ ، وعسوة لتكبر صمرا . ذلك وكا جاد بالجزء (١)

$$(y^2 z^3 \cos x - 4xz^3) dx + 2xy \sin x dy + (3y^2 z^2 \sin x - x^4) dz = d\phi$$

بأي طريقة من طرق مسألة ١٢ نجد أن ثابت $\phi = y^2 z^3 \sin x - x^4$.

١٥- ليكن \mathbf{F} مجال قوة تحفظ بحيث أن $\mathbf{F} = -\nabla \phi$. افترض جيبيا كتلة m ثابتة . يتحرك في هذا المجال . إذا كانت A ، B أي نقطتين في الفراغ . أثبت أن

$$\phi(A) + \frac{1}{2}mv_A^2 = \phi(B) + \frac{1}{2}mv_B^2$$

حيث v_A ، v_B هما قيمتا سرعات الجسيم عند A ، B على الترتيب .

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a} = -m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad \text{إذن} \quad \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2$$

$$\text{كامل} \quad \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right]_A^B = -\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$\text{إذا} \quad \mathbf{F} = -\nabla \phi, \quad \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B d\phi = \phi(A) - \phi(B)$$

$$\text{حيث:} \quad \phi(A) - \phi(B) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

والنتيجة تتج

تسمى طاقة الوضع عند A و $\frac{1}{2}mv_A^2$ تكون هي طاقة الحركة عند A . تنص النتيجة على أن الطاقة الكلية عند A تساوي الطاقة الكلية عند B (حفظ الطاقة) . تذكر استعمال علامة الناقص في $\mathbf{F} = -\nabla \phi$.

١٦- إذا كان $\phi = 2xyz^2$ ، $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ ، C هي المنحنى $x = t^2$ ، $y = 2t$ ، $z = t^3$ من $t=0$ إلى $t=1$.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{(ب)} \quad \int_C \phi \, ds \quad \text{(١)} \quad \text{إلى} \quad t=1 \quad \text{أحسب التكاملات الخطية}$$

$$\phi = 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^6) = 4t^8 \quad \text{على طول} \quad C \quad \text{(١)}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{و}$$

$$d\mathbf{r} = (2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) \, dt$$

$$\begin{aligned} \int_C \phi \, ds &= \int_0^1 4t^8 (2t + 2 + 3t^2) \, dt \\ &= 4 \int_0^1 2t^{10} \, dt + 8 \int_0^1 t^8 \, dt + 12 \int_0^1 t^{11} \, dt = \frac{8}{11} + \frac{4}{9} + 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} = 2t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k} \quad \text{ (ب) على طول } C$$

$$\mathbf{F} \times d\mathbf{r} = (2t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}) \times (2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt \quad \text{حيث } \frac{d}{dt}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^2 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2t & 3t^2 \end{vmatrix} dt = [(-3t^5 - 2t^4)\mathbf{i} + (2t^5 - 6t^3)\mathbf{j} + (4t^3 + 2t^4)\mathbf{k}] dt$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \times d\mathbf{r} &= \mathbf{i} \int_0^1 (-3t^5 - 2t^4) dt + \mathbf{j} \int_0^1 (-4t^3) dt + \mathbf{k} \int_0^1 (4t^3 + 2t^4) dt \\ &= -\frac{9}{10}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k} \end{aligned}$$

تكاملات السطح :

$$17 - \text{تعلي تعريف للكمية } \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \text{ على سطح } S \text{ بدلالة نهايات المجموع.}$$

نقسم المساحة S إلى M من عناصر مساحة ΔS_p حيث $p = 1, 2, 3, \dots, M$. اختر أي نقطة P_p في نطاق ΔS_p والتي إحداثياتها (x_p, y_p, z_p) . عرف $\mathbf{A}_p = \mathbf{A}(x_p, y_p, z_p)$ ليكن \mathbf{n}_p وحدة المتجه العمودية الموجبة للمساحة ΔS_p عند P . من المجموع.

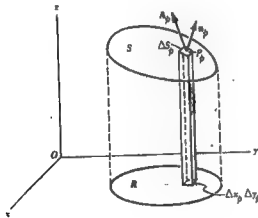
$$\sum_{p=1}^M \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p \Delta S_p$$

حيث $\mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}_p$ تكون مركبة عمودية لتقارب \mathbf{A}_p عند P_p .

الآن نأخذ النهايات لهذا المجموع كالآتي
عند $M \rightarrow \infty$ بطريقة ما بحيث أكبر بعد من كل من ΔS_p يقترب من الصفر.

هذه النهايات - إذا وجدت - تسمى السطحى المركبة العمودية الموجبة \mathbf{A} على S ويعرف بواسطة

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$



شكل ١٠ - ١

١٨ - افترض أن السطح S له الانقطاع R على المستوى xy (شكل مسألة ١٨) بين أن

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_R \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \frac{dx dy}{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}$$

من المسألة ١٧ يكون تكامل السطح هو نهاية المجموع .

$$\sum_{p=1}^N A_p \cdot n_p \Delta S_p \quad (1)$$

اسقاط ΔS_p على المستوى xy يكون $|np \Delta S_p|$ أو $S_p \cdot |n_p \cdot k|$ والذي يساوى $\Delta x_p \Delta y_p$

$$\Delta S_p = \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|n_p \cdot k|} \quad \text{حيث أن (١) لذا يصبح جمع (١)}$$

$$\sum_{p=1}^N A_p \cdot n_p \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|n_p \cdot k|} \quad (2)$$

من مبادئ نظريات حساب التكامل نهاية هذا المجموع الذى فيه $M \rightarrow \infty$ بطريقة ما حيث يكون الجهد الأكبر لقيمة Δx_p و Δy_p يقتربا من الصفر فيكون

$$\iint_R A \cdot n \frac{dx dy}{|n \cdot k|}$$

وبالتالى تكون النتيجة المطلوبة .

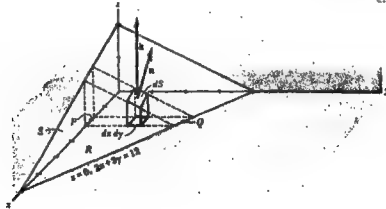
يقول محمد فإن النتيجة $\Delta S_p = \frac{\Delta x_p \Delta y_p}{|n_p \cdot k|}$ نطقا لقرنها حقيقية لكن يمكن أن نرى في الفصل التالي أنهم

يختلفوا من بعض إكبة متناهية الصغر لرتبة أعلى من $\Delta x_p \Delta y_p$ ويستغفم هذه النهايات في (١) ، (٢) يمكن إضمار أنها في الحقيقة متساوية .

$$\iint_S A \cdot n dS \quad \text{حيث } A = 18x + 12y + 3yz \text{ و } S \text{ هي جزء من المستوى } 2x + 3y + 6z = 12$$

و الموجودة في الثمن الأول .

السطح S واسقاطه R على المستوى xy مبين بشكل $v=0$



شكل v=0

من مسألة ١٧

$$\iint_S A \cdot n \, dS = \iint_R A \cdot n \frac{dx \, dy}{|n \cdot k|}$$

لإيجاد n نذكر أن المتجه العمودي على السطح $12 = (2x + 3y + 6z)$ يعطى بالمتدرج $\nabla(2x + 3y + 6z) = 2i + 3j + 6k$ (أنظر مسألة ٥ من الفصل ٤). حينئذ الوحدة العمودية لأي نقطة للسطح S (شكل ٥-٧) تكون

$$n = \frac{2i + 3j + 6k}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k$$

$$n \cdot k = \left(\frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k\right) \cdot k = \frac{6}{7} \quad \text{وهكذا} \quad \frac{dx \, dy}{|n \cdot k|} = \frac{7}{6} dx \, dy \quad \text{لذا}$$

$$A \cdot n = (18x i - 12j + 3y k) \cdot \left(\frac{2}{7}i + \frac{3}{7}j + \frac{6}{7}k\right) = \frac{36x - 36 + 18y}{7} = \frac{36 - 12x}{7}$$

باستعمال الحقيقة أن $x = \frac{12 - 2x - 3y}{6}$ من معادلة السطح S إذن

$$\iint_S A \cdot n \, dS = \iint_R A \cdot n \frac{dx \, dy}{|n \cdot k|} = \iint_R \left(\frac{36 - 12x}{7}\right) \frac{7}{6} dx \, dy = \iint_R (6 - 2x) dx \, dy$$

لحساب التكامل التتالي على R ، إجعل x ثابتة وكامل بالنسبة إلى y من $y = 0$ إلى $y = 6 - 2x$ (في شكل ٥-٧) P في شكل ٥-٧) إلى Q في شكل ٥-٧) ثم كامل بالنسبة إلى x من $x = 0$ إلى $x = 6$. في هذه الحالة تكون R قد أكلت تماماً ويصبح التكامل

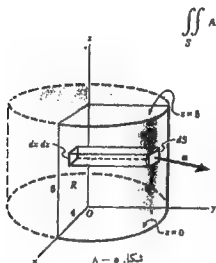
$$\int_{x=0}^6 \int_{y=0}^{(6-2x)} (6 - 2x) dy \, dx = \int_{x=0}^6 \left(24 - 12x + \frac{4x^2}{3}\right) dx = 24$$

إذا اخترنا الوحدة العمودية الموجبة n عكس التي في شكل ٥-٧ نتحصل على النتيجة 24 -.

$$٢٠ - احسب \iint_S A \cdot n \, dS \quad \text{حيث} \quad A = x i + x j - 3y^2 z k \quad \text{و} \quad S \quad \text{هي سطح الأسطوانة} \quad x^2 + y^2 = 16$$

الموجودة في النصف الأول بين $z = 0$ و $z = 5$

أسقط S على المستوى xy كان في شكل ٥-٨ A والمسي اسقاط R تذكر أن اسقاط S على المستوى xy لا يمكن استماله هنا. إذن



$$\iint_S A \cdot n \, dS = \iint_R A \cdot n \frac{dx \, dz}{|n \cdot j|}$$

المعروف على $x^2 + y^2 = 16$ هو

$$\nabla(x^2 + y^2) = 2xi + 2yj$$

لذا الوحدة الموجهة للسطح S لهيئة بشكل $A=0$ تكون

$$n = \frac{2xi + 2yj}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{xj + yj}{4}$$

حيث $x^2 + y^2 = 16$ على S

$$A \cdot n = (xi + yj - 8k) \cdot \left(\frac{xj + yj}{4}\right) = \frac{1}{4}(xy + yx)$$

$$n \cdot j = \frac{xj + yj}{4} \cdot j = \frac{y}{4}$$

حيث تكامل السطح يساوي

$$\iint_R \frac{xy + yx}{y} \, dx \, dz = \int_{z=0}^8 \int_{x=0}^8 \left(\frac{xy}{\sqrt{16-x^2}} + x \right) \, dx \, dz = \int_{x=0}^8 (4x + 8) \, dx = 90$$

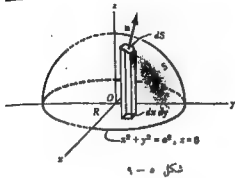
٢١- احسب $\iint_S \phi \, n \, dS$ حيث $\phi = xyz$ و S سطح الميزن في مسألة ٢

$$\iint_S \phi \, n \, dS = \iint_R \phi \, n \frac{dx \, dz}{|n \cdot j|} \quad \text{لهيئة}$$

باعتبار $n = \frac{xj + yj}{4}$ ، $n \cdot j = \frac{y}{4}$ مثل مسألة ٢، يصبح هذا التكامل الآتي

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{3}{8} xy (xi + yj) \, dx \, dz &= \frac{3}{8} \int_{z=0}^8 \int_{x=0}^8 (x^2 xi + xy \sqrt{16-x^2} j) \, dx \, dz \\ &= \frac{3}{8} \int_{z=0}^8 \left(\frac{64}{3} xi + \frac{64}{2} z j \right) \, dz = 1004 + 100j \end{aligned}$$

٢٢- إذا كان $F = yi + (x-2xz)j - xyk$ احسب $\iint_S (\nabla \times F) \cdot n \, dS$ حيث S سطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ فرق المستوى xy



$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x-2xz & -xy \end{vmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$$

مردى على $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ is

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

حيث الوحدة العمودية \mathbf{n} لشكل ٩-٥ المثل بالبادلة

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R}$$

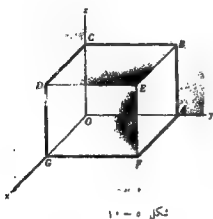
حيث $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

اسقاط S على المستوى xy هو المنطقة R المحددة بالدائرة $x^2 + y^2 = R^2, z=0$ (انظر شكل ٩-٥). إذن

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \frac{dx \, dy}{|n \cdot k|} \\ &= \iint_R (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R} \right) \frac{dx \, dy}{z/R} \\ &= \int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{3(x^2+y^2) - 2x^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \, dy \, dx \end{aligned}$$

استخدم حقيقة أن $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ لحساب التكامل الثلاثي ، حول الاحداثيات الكروية إلى الاحداثيات القطبية حيث (ρ, ϕ) حيث $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ تصبح التكامل الثلاثي

$$\begin{aligned} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \frac{3\rho^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\phi &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \frac{3(\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \phi) + \rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^R \left(-2\rho \sqrt{R^2 - \rho^2} + \frac{\rho^2 \rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) d\rho \, d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[(\rho^2 - R^2)^{3/2} - \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right]_{\rho=0}^R d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} (R^3 - R^3) d\phi = 0 \end{aligned}$$



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{أحسب} \quad \mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k} \quad \text{إذا كان} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

حيث S سطح المكعب (شكل ١٠-٥) المحدود بواسطة

$$x=1, x=0, y=1, y=0, z=1, z=0$$

الوجه $DEFG$: $x=1, z=1$ حيث

$$\begin{aligned} \iint_{DEFG} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_0^1 \int_0^1 (4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 4z \, dy \, dz = 2 \end{aligned}$$

الوجه $ABCO$: $x=0, z=0$ حيث

$$\iint_{ABCO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i}) \, dy \, dz = 0$$

الوجه $ABEF$: $y=1, z=1$ حيث

$$\iint_{ABEF} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^1 -dx \, dz = -1$$

الوجه $OGDC$: $y=0, z=0$ حيث

$$\iint_{OGDC} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4xz\mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{j}) \, dx \, dz = 0$$

الوجه $BCDE$: $x=1, z=1$ حيث

$$\iint_{BCDE} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 y \, dx \, dy = \frac{1}{2}$$

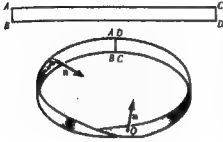
الوجه $AFGO$: $x=0, z=0$ حيث

$$\iint_{AFGO} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^1 (-y^2\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{k}) \, dx \, dy = 0$$

بالجمع

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = 2 + 0 + (-1) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

٢٤- في التعامل بتكاملات السطح قدينا أنفسنا بالاسطح التي لها جانبان . مثل مثال السطح الذي ليس له جانبان .



شكل ١١-٥

خذ شريط ورق مثل $ABCD$ (شكل ١١-٥) بلوى انقباض بحيث أن النقط A و B تقع على C و D على الترتيب شكل ١١-٥ إذا كان \blacksquare هو السطح الموجب عند النقطة P السطح ، نجد أن كلما تحرك \blacksquare حول السطح فإنه يمسك اتجاهه الأصل عند ما يصل إلى P مرة أخرى . إذا حولنا ثلثين جنب واحد فقط من السطح سنجد أن الشكل قد تحول . هذا السطح يسمى شريطة مويوس . كذلك لسطح له جانب واحد فقط في بعض الأحيان يسمى هذا السطح غير قابل للتوجه و سطح الجانبين يسمى قابل للتوجه .

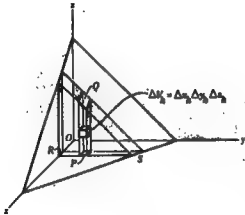
تكاملات الحجم :

٢٥- ليكن $V = 45x^2y$ ϕ وليكن V تعرف المنطقة المغطاة بالمتغيرات $x=0, y=0, z=0, x+2y+z=8, z=0$.

(١) عبر عن $\iiint_V \phi \, dV$ كتباية مجموع (ب) احسب التكامل الذي في (أ) .

(أ) قسم المنطقة V إلى أجزاء أصغر إلى M من المكعبات

لحساب حجم M : $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ $k=1, 2, \dots, M$ شكل (١٢-٥) وليكن (x_k, y_k, z_k) نقطة في ذلك المكعب عرف المنطقة $\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$ اعتبر المجموع .



شكل ١٢-٥

$$\sum_{k=1}^M \phi_k \Delta V_k \quad (1)$$

على كل المكعبات الممكنة في المنطقة أعطت النهاية لهذا المجموع عندما $M \rightarrow \infty$ في مثل هذه الحالة أكبر الكيات ΔV_k يقترب من الصفر إن وجدت صغرنا

$\iiint_V \phi \, dV$ يمكن أن نرى أن هذه النهاية

مستقلة عن طريقة التقسيم إذا كانت ϕ مستمرة داخل V .

فيكون المجموع (١) على كل المكعبات الممكنة في المنطقة يتصح أن يتابع في أسلوب مرتب . إحدى الطرق الممكنة أن نجعل أولاً كل الخفود التي في (١) المناظرة لعناصر الحجم المحتوية في حدود مثل PQ هذا يعادل عافضتنا على PQ و Q ثابتة والجسم على كل Q في PQ ثم نبحث PQ ولكن أجسم على كل Q في PQ هذا يعادل جميع كل الأعمدة مثل BQ المحتوية (الموجودة) في الوجه RS وبالتالي يعادل الجسم على كل المكعبات الموجودة في مثل هذا الوجه . أعبراً غير PQ هذا يعادل جميع لكل الأنواع مثل RS .

في هذه الطريقة لجميع إحداثيات أولاً على z ثم على y وأخيراً على x على أي حال يمكن أخذ المجموع في أي ترتيب آخر .

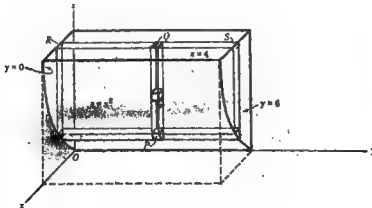
(ب) الأفكار المنقصة في طريقة الجمع المبينة في (أ) يمكن استخدامها في حساب التكامل . الاحتفاظ بقيم x ، y ثابتة ثم تكامل من $z = 0$ (قاعدة السمود PQ) إلى $z = 8 - 4x - 2y$ (قمة السمود PQ) . ثانياً احتفظ بقيم x ثابتة و تكامل بالنسبة إلى y . هذه يبادل لجميع الأعمدة التي لها قاعدة في المستوى xy ($z = 0$) الموجودة في أي مكان من R (حيث $y = 0$) إلى S (حيث $4x + 2y = 8$ أو $4x = 4 - 2y$) ويكون التكامل من $y = 0$ إلى $y = 4 - 2x$. أخيراً أجمع كل الألواح الموازية لمستوى xy التي يبادل التكامل من $x = 0$ إلى $x = 2$. ويمكن أن يكتب التكامل في الصورة

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} \int_{z=0}^{8-4x-2y} 45x^2 y \, dz \, dy \, dx &= 45 \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{4-2x} x^2 y (8-4x-2y) \, dy \, dx \\ &= 45 \int_{x=0}^2 \frac{1}{2} x^2 (4-2x)^2 \, dx = 120 \end{aligned}$$

لاحظ أيضاً يمكن تعميل هذه النتيجة كتكامل في المنطقة V التي فيها الكثافة ϕ بتغير تبعاً للصيغة $\phi = 45x^2 y$.

$$\begin{aligned} \text{١٢-٧. ليكن } W = 2xz + yz - x^2 \text{ احسب } \iiint_V W \, dV \text{ حيث } V \text{ منطقة محددة بالسطح} \\ x=0, y=0, y=6, z=x^2, z=4 \end{aligned}$$

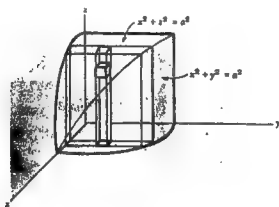
المستطبة V هي التي (أ) بالاحتفاظ بقيم x ، y ثابتة وإجراء التكامل من $z = x^2$ إلى $z = 4$ (قاعدة إلى قمة السمود PQ) ، (ب) ثم بالاحتفاظ بقيم x ثابتة وإجراء التكامل من $y = 0$ إلى $y = 6$ (من R إلى S في التمثيل) (ج) أخيراً تكامل من $x = 0$ إلى $x = 2$ (حيث $z = x^2 = 4$ تقابل $x = 4$) إذن يكون التكامل المطلوب هو



شكل ١٢-٥

$$\begin{aligned} & \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^b \int_{z=x^2}^b (2xz - z + y^2 k) dz dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^b \int_{x^2}^b 2xz dz dy dx - \int_0^2 \int_0^b \int_{x^2}^b z dz dy dx + k \int_0^2 \int_0^b \int_{x^2}^b y^2 dz dy dx \\ &= 1281 - 24j + 384k \end{aligned}$$

٧٧- أوجد حجم المنطقة المشتركة بين القاطع الأسطوانتين $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + y^2 = z^2$



شكل - ١١

الحجم المطلوب = ٨ مرات حجم المنطقة المبينة في شكل - ١١

$$\begin{aligned} &= 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-y^2}} dz dy dx \\ &= 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy dx = 8 \int_{x=0}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3} \end{aligned}$$

مسائل متنوعة

٧٨- إذا كان $R(x) = (3x^2 - x)I + (2 - 5x)J - 4xK$ أوجد (أ) $\int_2^4 R(x) dx$ ، (ب) $\int_2^4 R(x) dx$

الجاب : (أ) $50I - 32J - 24K$ ، (ب) $(x^3 - 5x^2)I + (2x - 3x^2)J - 2x^2K + c$

٧٩- احسب $\int_0^{2\pi} (3 \sin x + 2 \cos x) dx$ الجواب : $30 + 2\pi$

٢٧- إذا كانت $A(t) = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$ و $B(t) = 2t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{k}$

$$\text{احسب } \int_0^2 A \times B \, dt \quad (\text{ب}) \quad \int_0^2 A \cdot B \, dt \quad (\text{أ})$$

$$\text{الجواب : (أ) } 12 \quad (\text{ب}) -24\mathbf{i} - \frac{40}{3}\mathbf{j} + \frac{64}{3}\mathbf{k}$$

٢٨- ليكن $A = t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $B = t\mathbf{j} - 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $C = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

$$\text{احسب } \int_1^2 A \times (B \times C) \, dt \quad (\text{ب}) \quad \int_1^2 A \cdot B \times C \, dt \quad (\text{أ})$$

$$\text{الجواب : (أ) } 0 \quad (\text{ب}) -\frac{37}{3}\mathbf{i} - \frac{44}{3}\mathbf{j} + \frac{13}{2}\mathbf{k}$$

٢٩- المجلة \mathbf{u} جسم عند أي زمن $t \geq 0$ تعطى بالمعادلة $\mathbf{u} = e^{-t}\mathbf{i} - 6(t+1)\mathbf{j} + 3 \sin t \mathbf{k}$ إذا كانت السرعة \mathbf{v} والإزاحة \mathbf{r} قيمتهما صفر عند $t = 0$ أوجد \mathbf{v} و \mathbf{r} عند أي زمن.

الجواب :

$$\mathbf{v} = (1 - e^{-t})\mathbf{i} - (3e^2 + 6t)\mathbf{j} + (3 - 3 \cos t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = (t - 1 + e^{-t})\mathbf{i} - (t^2 + 3t^2)\mathbf{j} + (3t - 3 \sin t)\mathbf{k};$$

٣٠- المجلة \mathbf{u} جسم عند أي زمن t تعطى بالمعادلة $\mathbf{u} = -gt\mathbf{j}$ حيث g كمية ثابتة عند $t=0$ تعطى السرعة بالمعادلة $\mathbf{v} = v_0 \cos \theta_0 \mathbf{i} + v_0 \sin \theta_0 \mathbf{j}$ والإزاحة بالمعادلة $\mathbf{r} = 0$. أوجد \mathbf{v} و \mathbf{r} عند أي زمن $t > 0$ ، نصف المعادلة حركة نتيجة انطلقت من منبع يصل بزاوية θ_0 مع الاتجاه الموجب محور x .

$$\text{الجواب : } \mathbf{v} = v_0 \cos \theta_0 \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta_0 - gt)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r} = (v_0 \cos \theta_0)t\mathbf{i} + \left[(v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \right]\mathbf{j}$$

$$\text{٣١- احسب } \int_2^3 A \cdot \frac{dA}{dt} \, dt \quad \text{إذا } A(2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{و} \quad A(3) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{الجواب : } 10$$

٣٢- أوجد السرعة المساحية لجسم يتحرك على المسار $\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$ حيث a, b, ω تكون ثوابت و t هو الزمن. الجواب : $\frac{1}{2}ab\omega^2 \mathbf{k}$

٣٣- إثبت أن مربع دوره الكوكبية في حركتها حول الشمس تتناسب مع مكعب أكبر المحاور في مدارها الذي على شكل قطع ناقص (قانون كيبلر الثالث).

$$\text{٣٤- إذا كان } A = (2y+3z)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz-xz)\mathbf{k} \quad \text{احسب } \int_C A \cdot d\mathbf{r} \quad \text{على طول المسارات } C$$

$$(أ) \quad z=0 \text{ to } z=1, \quad x=2y^2, \quad y=z, \quad z=t^2$$

$$(ب) \quad \text{المحاور المتجهة من } (0,0,0) \text{ إلى } (0,0,1) \text{ ثم إلى } (0,1,1) \text{ ثم إلى } (2,1,1)$$

$$(ج) \quad \text{المحاور المتجهة التي تربط بين } (0,0,0) \text{ و } (2,1,1)$$

$$\text{الجواب : (أ) } 288/35 \quad (\text{ب}) 10 \quad (\text{ج}) 8$$

$$\text{٣٥- إذا كان } F = (5xy - 6xz^2)\mathbf{i} + (2yz - 4xz)\mathbf{j} \quad \text{احسب } \int_C F \cdot d\mathbf{r} \quad \text{على طول المنحنى } C \text{ في المستوى } xy, \quad z = \pi^2$$

$$\text{من النقطة } (1,1) \text{ إلى } (2,8). \quad \text{الجواب : } 35$$

٢٩- إذا كان $F = (2x+y)I + (3y-x)J$ احسب $\int_C F \cdot dr$ حيث C منحنى في المستوى xy يتكون من خطوط

مستقيمة من $(0, 0)$ إلى $(2, 0)$ ثم إلى $(3, 2)$. الجواب : ١١

٤٠- أوجد الشغل المبذول في تحريك جسم في مجال القوة $F = 3xz^2I + (2xz-y)J + zK$ على طول

(أ) الخط المستقيم من النقطة $(0, 0, 0)$ إلى النقطة $(2, 1, 3)$.

(ب) منحنى القزح $x=2\cos t, y=t, z=4t^2-t$ من $t=0$ إلى $t=1$.

(ج) المنحنى المعروف بالمعادلة $x^2=4y, 3x^2=8z$ من $x=0$ إلى $x=2$.

الجواب : (أ) 16 (ب) 14.2 (ج) 16

٤١- احسب $\int_C F \cdot dr$ حيث $F = (x-3y)I + (y-2x)J$ و C هو المنحنى المثلث في المستوى xy

و $x=2\cos t$ و $y=3\sin t$ من $t=0$ إلى $t=2\pi$.

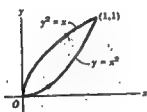
الجواب : 6π إذا كانت C تتحرك في الاتجاه الموجب (عكس اتجاه عقارب الساعة) .

٤٧- إذا كانت T وحدة المتجه المماسية للمنحنى C ، $r = r(u)$ بين أن الشغل المبذول في حركة جسم في مجال القوة F

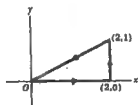
على طول المنحنى C يعطى بالعلاقة $\int_C F \cdot T \cdot ds$ حيث s هي طول القوس .

٤٣- إذا كانت $F = (2x+y^2)I + (3y-x)J$ احسب $\int_C F \cdot dr$ حول المثلث C شكل ١٥- .

(أ) في الاتجاه المشار إليه (ب) عكس الاتجاه المشار إليه الجواب : (أ) $-14/3$ (ب) $14/3$



شكل ١٥-



شكل ١٦-

٤٤- احسب $\int_C A \cdot dr$ حول المنحنى المثلث C شكل ١٥- إذا كان $A = (x-y)I + (x+y)J$ الجواب : $2/3$

٤٥- إذا كان $A = (y-2x)I + (3x+2y)J$ احسب دوران A حول الدائرة C في المستوى xy والتي مركزها عند

نقطة الأصل ونصف قطرها 2 إذا تحركت في الاتجاه الموجب الجواب : 8π

٤٦- (أ) إذا كان $A = (4xy - 3x^2z^2)i + 2x^2j - 2x^2zk$ أثبت أن $\int_C A \cdot dr$ مستقلة عن المنحنى الواصل بين

نقطتين (ب) بين أنه يوجد دالة قابلة للتفاضل ϕ بحيث أن $A = \nabla\phi$ وأوجد ϕ .

الجواب : (ب) ثابت $\phi = 2x^2y - x^3z^2 +$

٤٧- (أ) أثبت أن $F = (y^2 \cos x + x^2)i + (2y \sin x - 4)j + (3xz^2 + 2)k$ مجال قوة تحفظ.

(ب) أوجد الجهد المبدئي للقوة F .

(ج) أوجد الشغل المبذول في تحريك جسم في هذا المجال من $(0, 1, -1)$ إلى $(\pi/2, -1, 2)$.

الجواب : (ب) ثابت $\phi = y^2 \sin x + xz^2 - 4y + 2x + 15$ (ج)

٤٨- أثبت أن $F = r^2e$ يكون محافظاً وأوجد الجهد المبدئي. الجواب : ثابت $\phi = \frac{r^3}{3} +$

٤٩- بين إذا كان مجال القوة $F = 2xz i + (x^2 - y)j + (2x - x^2)k$ يكون محافظاً أو غير محافظ.

الجواب : غير محافظ

٥٠- بين أن الشغل المبذول على جسم لتحويله من A إلى B يساوي معدل تغير طاقته الحركية له عند هذه النقطة سواء كانت القوة محافظة أو غير محافظة.

٥١- احسب $\int_C A \cdot dr$ على طول المنحنى $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ من النقطة $(0, 1, 1)$ إلى النقطة $(1, 0, 1)$

إذا كانت $A = (yz + 2x)i + xzj + (xy + 2z)k$ الجواب : ١

٥٢- (أ) إذا كان $E = r$ هل توجد دالة ϕ بحيث أن $E = -\nabla\phi$ ؟ إذا كان كذلك أوجد ϕ .

(ب) احسب $\oint_C F \cdot dr$ إذا كانت C أي منحنى يحيط بمركز.

الجواب : (أ) ثابت $\phi = -\frac{r^2}{2}$ (ب) 0

٥٣- بين أن $(2x \cos y + x^2 \sin y) dx + (x^2 \cos y - x^2 \sin y) dy + x \sin y dz$ تكون دالة تفاضلية مديرة.

سيتم حل الدالة التفاضلية $\phi = (2x \cos y + x^2 \sin y) dx + (x^2 \cos y - x^2 \sin y) dy + x \sin y dz$

الجواب : ثابت $\phi = x^2 \cos y + x^2 \sin y$

٥٤- حل (أ) $(e^{-y} + 2x^2y^2) dx + (2x^2y - xe^{-y}) dy = 0$

(ب) $(x - e^{-x} \sin y) dx + (1 + e^{-x} \cos y) dy + (x - 2x) dz = 0$

الجواب : (أ) ثابت $xe^{-y} + x^2y^2 =$ (ب) ثابت $xz + e^{-x} \sin y + y - 4x^2 =$

٥٥- إذا كان $\phi = 2xy^2z + x^2y$ احسب $\oint_C \phi \cdot dr$ حيث C

- (أ) هو المنحنى $x = t^2$ ، $y = t^3$ ، $z = t$ من $t = 0$ إلى $t = 1$
 (ب) يتكون من خطوط مستقيمة من $(0, 0, 0)$ إلى $(1, 0, 0)$ ثم إلى $(1, 1, 1)$.

الجواب : (أ) $\frac{19}{45}i + \frac{11}{15}j + \frac{75}{11}k$ (ب) $\frac{1}{2}i + 2k$

٥٦ - إذا كانت $F = 2y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ أوجد $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$ على طول المنحنى $x = \cos t$ ، $y = \sin t$ ، $z = 2 \cos t$ من $t = 0$ إلى $t = \pi/2$.
 الجواب : $(2 - \frac{\pi}{2})\mathbf{i} + (\pi - \frac{1}{2})\mathbf{j}$

٥٧ - إذا كانت $A = (2x+y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (y-2)\mathbf{k}$ and $B = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ حول الدائرة التي في المستوى xy ومركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها 2 يتحرك في الاتجاه الموجب .
 الجواب : $4\pi(7i + 3j)$

٥٨ - احسب $\iint_S A \cdot \mathbf{n} \, dS$ لكل من الحالات الآتية

(أ) $A = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ حيث S سطح المستوى $2x + y = 6$ في الثمن الأول المقطوع بالمستوى $x = 4$.
 (ب) $A = (x+y^2)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ حيث S سطح المستوى $2x + y + 2z = 6$ في الثمن الأول .
 الجواب : (أ) 108 (ب) 81

٥٩ - إذا كان $F = 2y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ و S يكون سطح القطع المكافئ الاسطوان $z = 8x$ في الثمن الأول المحدد بالمستويات $x = 4$ ، $y = 6$ ، $z = 6$ احسب $\iint_S F \cdot \mathbf{n} \, dS$ الجواب : 132

٦٠ - احسب $\iint_S A \cdot \mathbf{n} \, dS$ على السطح الداخلي S لمنطقة المحددة بالاسطوانة $y = 8$ و $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، $x^2 + z^2 = 0$ ، $z = 0$.
 إذا كان $A = 8xz\mathbf{i} + (2x+y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ الجواب : 18π

٦١ - احسب $\iint_S z \cdot \mathbf{n} \, dS$ على (أ) السطح S لوحدة المكعب المحددة بمحاور المستويات $x = 1$ ، $y = 1$ ، $z = 1$.
 (ب) سطح الكرة التي نصف قطرها 5 ومركزها عند النقطة $(0, 0, 0)$.
 الجواب : (أ) 3 (ب) $4\pi a^3$

٦٢ - احسب $\iint_S A \cdot \mathbf{n} \, dS$ على السطح الداخلي لمنطقة أصل المستوى xy المحددة بالخطوط $x = 4$ ، $y = 4$ ، $z = 4$.
 إذا كانت $A = 4xz\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ الجواب : 320

٦٣ - (أ) ليكن R سطح السطح S على المستوى xy . أثبت أن مساحة السطح S تعطى بالمعادلة

$$z = f(x, y) \text{ إذا كانت معادلة } S \text{ هي}$$

(ب) على مساحة السطح إذا كانت S لما المعادلة $F(x, y, z) = 0$ ؟

$$\iint_S \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy \quad \text{الجواب :}$$

٩٤ - أوجد مساحة سطح المستوى $x + 2y + 2z = 12$ المقطوع بواسطة (أ) $x=0, y=0, x=1, y=1$ ،
(ب) $x=0, y=0$ و $x^2 + y^2 = 16$ الجواب : (أ) $3/2$ (ب) 6π

٩٥ - أوجد مساحة سطح المنطقة المشتركة بين تقاطع الاسطوانتين $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$.
الجواب : $16a^2$

٩٦ - احسب (أ)

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{و} \quad \iint_S \phi \, n \, dS \quad \text{(ب) إذا كان } \phi = 4x + 3y - 2z, \mathbf{F} = (x + 2y)\mathbf{i} - 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k},$$

حيث S هي القطع $2x + y + 2z = 6$ المحددة بواسطة $x=0, y=0$ و $y=2$.

الجواب : (أ) 1 (ب) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

٩٧ - أوجد حل المسألة السابقة إذا كانت $2x + y + 2z = 6$ المحددة بواسطة $x=0, y=0$ و $z=0$.

الجواب : (أ) $9/2$ (ب) $72\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 72\mathbf{k}$

٩٨ - احسب $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ على المنطقة R في المستوى xy المحددة بـ $x^2 + y^2 = 36$. الجواب : 144π

٩٩ - احسب $\iiint_V (2x + y) \, dV$ حيث V هي المنطقة المثلثة المحددة بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ والمستويات

$z=0$ و $x=0, y=0, z=2$ الجواب : $80/3$

١٠٠ - إذا كانت $\mathbf{F} = (2x^2 - 3x)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 4x\mathbf{k}$ احسب (أ) $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$ (ب) $\iiint_V \nabla \times \mathbf{F} \, dV$

حيث V هي المنطقة المثلثة المحددة بالمستويات $2x + 2y + z = 4$ و $x=0, y=0, z=0$

الجواب : (أ) $\frac{8}{3}$ (ب) $\frac{8}{3}(1 - \mathbf{k})$

الفصل السادس

نظرية التباين — نظرية ستوكس ونظريات التكامل المرتبطة

نظرية التباين لجوليس :

تتبع كل أنه إذا كانت V هي الحجم المحدد ب سطح مطلق S و A دالة موزع متجه لها تقابل مستمر إذن

$$\iiint_V \nabla \cdot A \, dV = \iint_S A \cdot n \, dS = \oint_S A \cdot ds$$

حيث n هو السور الموجب على S (في اتجاه الخارج) .

نظرية ستوكس :

تتبع كل أنه إذا كانت S سطحاً مفتوحاً ، ذا جانين محدداً بمنحى مطلق غير متقاطع C (منحى بسيط مطلق) حيث إذا كانت A لها مشتقات مستمرة ،

$$\oint_C A \cdot ds = \iint_S (\nabla \times A) \cdot n \, dS = \iint_S (\nabla \times A) \cdot ds$$

حيث C تتحرك في الاتجاه الموجب . يسمى اتجاه C موجباً إذا كان مشاهداً يسيراً على حدود S في هذا الاتجاه ورأسه تشير إلى اتجاه السور الموجب لـ S يكون السطح على شماله .

نظرية جرين في المستوى :

إذا كانت R منطقة مغلقة في المستوى xy محددة بمنحى مطلق بسيط C وإذا كانت M و N دوال متصلة في x و y ولهما مشتقات مستمرة في المنطقة فإن

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

حيث C تتحرك في الاتجاه الموجب (مكن عقارب الساعة) كما لم يذكر غير ذلك مفترض دائماً أن \oint أن التكامل المذكور في الاتجاه الموجب .

نظرية جرين في المستوى هي حالة خاصة من نظرية ستوكس (أنظر مسألة ٤) من الطريف ملاحظة أن نظرية جاوس للتباديل هي تعميم لنظرية جرين في المستوى حيث (المستوى) المنطقة R وحدها المغلقة (المنحنى) C حل محل (الفراغ) المنطقة V وحدها المغلقة (السطح) S . لهذا السبب - في بعض الأحيان تسمى نظرية التباديل نظرية جرين في الفراغ (أنظر مسألة ٤).

نظرية جرين في المستوى صحيحة للمناطق المحدودة بواسطة عدد محدود من المنحنيات البسيطة المغلقة والتي لا تتقاطع (أنظر مسألة ١٠، ١١).

نظريات التكامل المرتبطة :

$$\iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot dS \quad - ١$$

تسمى نظرية جرين أو مطابقة جرين الأولى

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot dS \quad - ٢$$

تسمى مطابقة جرين الثانية أو نظرية جرين المتماثلة أنظر مسألة ٢١

$$\iiint_V \nabla \times A dV = \iint_S (n \times A) dS = \iint_S dS \times A \quad - ٣$$

لاحظ هنا أن الضرب اليميني لنظرية جاوس للتباديل حدث على الضرب المتجهي أنظر مسألة ٢٢

$$\oint_G \phi dx = \iint_S (n \times \nabla \phi) dS = \iint_S dS \times \nabla \phi \quad - ٤$$

٥ - لكن ϕ تمثل أما دالة متجه أو دالة عددية تبعاً للرمز \circ بين ضرب عددي أو متجهي أو ضرب عادي. إذن :

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \circ \psi dV &= \iint_S n \circ \psi dS = \iint_S dS \circ \psi \\ \oint_G dx \circ \psi &= \iint_S (n \times \nabla) \circ \psi dS = \iint_S (dS \times \nabla) \circ \psi \end{aligned}$$

نظرية جاوس للتباديل ونظرية ستوكس والنتيجة ٣ و ٤ هي حالات خاصة من هذه النظرية. أنظر مسائل ٢٢ ،

بالمثل لتكن معادلات المنحنيات EAF و EBF هي $x = X_1(y)$ و $x = X_2(y)$ على الترتيب . إذن

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_{y=c}^f \left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^f [N(X_2, y) - N(X_1, y)] dy \\ &= \int_f^c N(X_1, y) dy + \int_c^f N(X_2, y) dy = \oint_C N dy \end{aligned}$$

$$\oint_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy \quad (٢) \quad \text{إذن}$$

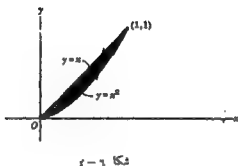
$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (٢) \text{ و } (١) \text{ يجمع}$$

٢- حقل نظرية جرين في المستوى المسطحة

$$\oint_C (xy + y^2) dx + x^2 dy$$

حيث C منحنى مغلق في المنطقة المحددة بواسطة $y = x^2$ و $y = x$

$y = x$ و $y = x^2$ يتقاطعا عند النقطه $(0,0)$ و $(1,1)$ والاتجاه الموجب للمحرك C موضح بالشكل ٦-٢



على طول $y = x^2$ التكامل الخطي يساوي

$$\int_0^1 ((x)(x^2) + x^2) dx + (x^2)(2x) dx = \int_0^1 (3x^3 + x^4) dx = \frac{19}{20}$$

على طول $y = x$ من $(0,0)$ إلى $(1,1)$ التكامل الخطي يساوي

$$\int_1^0 ((x)(x) + x^2) dx + x^2 dx = \int_1^0 2x^2 dx = -1$$

$$= \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20} \quad \text{إذن التكامل الخطي المطلوب}$$

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2) \right] dx dy \\ &= \iint_R (x - 2y) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^x (x - 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (x - 2y) dy \right] dx = \int_0^1 (xy - y^2) \Big|_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

حيث تكون النظرية قد برهنت

٣- استخدم الثبات نظرية جرين في المستوى المحلي في مسألة المنحنيات C التي لها الخطوط الموازية لمجاور الأضلاعيات يمكن أن تقطع C في أكثر من نقطتين .

اعتبر المنحنى المغلق C المبين في شكل ٣-٦ والذي فيه الخطوط الموازية للمجاور يمكن أن تقابل C في أكثر من نقطتين . يرسم خط ST تنقسم المنطقة إلى منطقتين R_1 ، R_2 من نفس النوع الذي أخذ في الاعتبار في المسألة ١ والتي تطبق عليها نظرية جرين .

أي أن

$$\int_{STUS} M dx + N dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (1)$$

$$\int_{STVS} M dx + N dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (2)$$

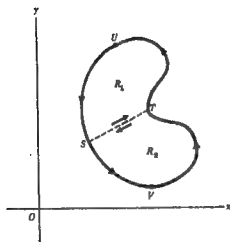
شكل ٣-٦

بجمع الأطراف اليسرى المعادلات (1) ، (2) واحمال القيمة التكاملية $M dx + N dy$ في كل حالة .

$$\int_{STUS} + \int_{STVS} = \int_{ST} + \int_{US} + \int_{ST} + \int_{VS} = \int_{STUS} + \int_{STVS} = \int_{USTVS}$$

لـ

$$\int_{ST} = - \int_{TS} \quad \text{باستخدام الحقيقة}$$



جميع الأطراف إلى المعادلات (١) ، (٢) واحتمال القيمة التكاملية .

$$\iint_{R_2} \dots = \iint_R$$

حيث تتكون R من المناطق R_1 ، R_2

$$\int_{\text{PSTT}} M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{إذن}$$

منطقة R المتغيرة هنا وفي المسألة (١) ، والتي لها أي منحنى مغلق يقع في المنطقة R يمكن باستمرار أن ينكش إلى نقطة بدون أن يترك R ، تسمى المنطقة البسيطة الاتصال . المنطقة التي ليست بسيطة الاتصال تسمى متعددة الاتصال . لقد بينا هنا أن نظرية جرين في المستوى تطبق على المنطقة البسيطة الاتصال المحددة بمنحنى مغلق . في (المسألة ١) امتدت النظرية لتشمل المناطق متعددة الاتصال .

المناطق البسيطة الاتصال الأكثر تعقيداً يجوز أن يكون من الضروري رسم خطوط كثيرة مثل ST لتأسيس النظرية

٤ - عبر بنظرية جرين في المستوى بالرموز الاتجاهية

$$A = M i + N j \quad \text{و} \quad r = x i + y j \quad \text{حيث} \quad M dx + N dy = (M i + N j) \cdot (dx i + dy j) = A \cdot dr$$

$$\text{لذلك} \quad dr = dx i + dy j$$

$$\text{أيضاً إذا كان} \quad A = M i + N j$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = - \frac{\partial N}{\partial x} i + \frac{\partial M}{\partial x} j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) k$$

$$(\nabla \times A) \cdot k = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{لذلك}$$

حيثما باستفاد نظام نظرية جرين في المستوى يمكننا كتابة

$$\oint_C A \cdot dr = \iint_R (\nabla \times A) \cdot k dR$$

$$\text{حيث} \quad dR = dx dy$$

تسمي ذلك السطح S في فراغ له المنحنى C كحدود يقضي طبيعياً إلى نظرية ستوكس التي برهنت في (المسألة ٣١)

$$V = 10x^4 - 2xy^3, \quad N = -3x^2y^2 \text{ and } \frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ along the path } x^4 - 6xy^2 = 0$$

يكون الحساب المباشر صعباً. مع أنه ملاحظة أن $\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$ and $N = -3x^2y^2$, $M = 10x^4 - 2xy^3$

ينتج أن التكامل يكون مستقلاً عن المسار. إذن يمكن استخدام أى مسار لخط المسار المكون من أجزاء من خط مستقيم من $(0,0)$ إلى $(2,0)$ ثم من $(2,0)$ إلى $(2,1)$

على طول مسار الخط المستقيم من $(0,0)$ إلى $(2,0)$ يكون $y=0, dy=0$ ويكون التكامل يساوى

$$\int_{x=0}^2 10x^4 dx = 64$$

على طول مسار الخط المستقيم من $(2,0)$ إلى $(2,1)$ يكون $x=2, dx=0$ ويكون التكامل يساوى

$$\int_{y=0}^1 -12y^2 dy = -4$$

إذن القيمة المطلوبة لتكامل الخط يساوى $64 - 4 = 60$

طريقة أخرى :

حيث $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $(10x^4 - 2xy^3) dx - 3x^2y^2 dy$ يكون تكاملاً مضبوطاً $2x^5 - x^2y^3$ إذن

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x^4 - 2xy^3) dx - 3x^2y^2 dy = \int_{(0,0)}^{(2,1)} d(2x^5 - x^2y^3) = 2x^5 - x^2y^3 \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 60$$

٧- بين أن المساحة المحددة بواسطة منحنى بسيط مغلق C يساوى بالمعادلة $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$

نظرية جرين. ضع $M = -y, N = x$ إذن

$$\oint_C x dy - y dx = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dx dy = 2 \iint_R dx dy = 2A$$

حيث A هي المساحة المطلوبة. لذلك $A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$

أوجد مساحة القطع الناقص $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta)(b \cos \theta) d\theta - (b \sin \theta)(-a \sin \theta) d\theta \quad \text{المساحة} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

٩ - احسب $\oint_C (y - \sin x) dx + \cos x dy$ حيث C

هو المثلث الموضح في شكل ٦ - ٥

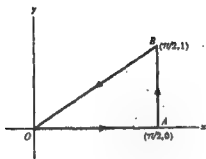
(١) مباشرة

(ب) باستخدام نظرية جرين في المستوى

(١) على طول $OA, y=0, dy=0$

ويكون التكامل يساوي

$$\int_0^{\pi/2} (0 - \sin x) dx + (\cos x)(0) = \int_0^{\pi/2} -\sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi/2} = -1$$



شكل ٦ - ٥

على طول $AB, x=\pi/2, dx=0$ ويكون التكامل يساوي

$$\int_0^1 (y-1) dy + 0 dy = 0$$

على طول $BO, y=2x/\pi, dy=2/\pi dx$ ويكون التكامل يساوي

$$\int_{\pi/2}^0 (\frac{2x}{\pi} - \sin x) dx + \frac{2}{\pi} \cos x dx = (\frac{x^2}{\pi} + \cos x + \frac{2}{\pi} \sin x) \Big|_{\pi/2}^0 = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$$

إذاً التكامل على طول $C = -1 + 0 + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$

(ب)

$$M = y - \sin x, N = \cos x, \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin x, \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

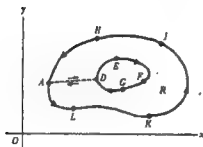
$$\begin{aligned} \oint_C M dx + N dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R (-\sin x - 1) dy dx \\ &= \int_{x=0}^{\pi/2} \left[\int_{y=0}^{2\pi/\pi} (-\sin x - 1) dy \right] dx = \int_{x=0}^{\pi/2} (-y \sin x - y) \Big|_0^{2\pi/\pi} dx \\ &= \int_{x=0}^{\pi/2} \left(-\frac{2\pi}{\pi} \sin x - \frac{2\pi}{\pi} \right) dx = -\frac{2}{\pi} (-x \cos x + \sin x) - \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

في اتفاق مع الجزء (أ)

لاحظ أنه توجد خطوط موازية لمحاور الإحداثيات (تتقاطع على محاور الإحداثيات في هذه الحالة) تقابل C في عدد لا نهائي من النقاط نظرية جرين في المستوى مازالت صحيحة . وعموماً فالنظرية صالحة عندما تكون C مكونة من عدد محدود من أجزاء خط مستقيم .

١٥ - بين أن نظرية جرين في المستوى أيضاً تكون صالحة للنقطة المتعددة الاتصال (شكل ٦-٦) .

المنطقة المظلمة R ، المبنية في الشكل تكون متعددة الاتصال حيث ليس كل منحنى مغلق



شكل ٦-٦

يقع في R يمكن أن يتكشف إلى نقطة بدون أن يترك R كما هو ملاحظ باعتبار منحنى يحيط $DEFGD$ مثلاً .
حسود المنطقة R المكونة من الحدود الخارجية $AHJKLA$ والحدود الداخلية $DEFGD$ التي تتحرك في الاتجاه الموجب بحيث أن شخص مسافر في هذا الاتجاه تكون دائماً المنطقة على يساره .

أفرضنا أن الاتجاه الموجب هو الموضح بشكل ٦-٦ .

لنرضي تأسيس النظرية ، ارسم خطاً مثل AD يمس قطعاً مستعرضاً يصل بين الحدود الخارجية والحدود الداخلية .

المنطقة المحاطة بواسطة $ADEFGDALKJHA$ تكون بسيطة الاتصال وبالتالي تكون نظرية جرين صالحة . إذن

$$\oint_{ADEFGDALKJHA} M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

ولكن التكامل الذي على اليسار ، يترك التكامل ويكون مساوياً

$$\int_{AD} + \int_{DEFGD} + \int_{DA} + \int_{ALKJHA} = \int_{DEFGD} + \int_{ALKJHA}$$

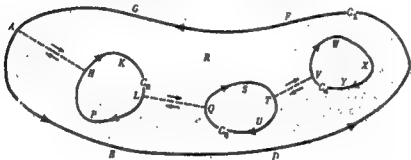
حيث $\int_{AD} = -\int_{DA}$ لذلك إذا كان C_1 هو المنحنى $ALKJHA$ ، C_2 هو المنحنى $DEFGD$ و C هي الحدود المنطقية المتكونة من C_1 و C_2 (متحركة في الاتجاه الموجب) :

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_C \text{ إذن وبالغالب}$$

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

١١ - بين أن نظرية جرين في المستوى صالحة للمنطقة R الشكل ٦-٧ . المجددة بواسطة المنحنى البسيط المغلق

$$C_1(ABDEFGA), C_2(HKLP), C_3(QSTUQ), \text{ و } C_4(VWXYZV)$$



شكل ٦-٧

كون القطاعات المشتركة AH و LQ و TV . إذن المنطقة المحاطة بواسطة $ANKLSTVWXYZVTUQLPHA$ هي منطقة بسيطة الاتصال وتطبق عليها نظرية جرين . التكامل على هذه الحدود يساوي

$$\int_{AH} + \int_{HKL} + \int_{LQ} + \int_{QST} + \int_{TV} + \int_{VWXYZ} + \int_{TV} + \int_{TVQ} + \int_{QST} + \int_{LPH} + \int_{HA} + \int_{ABDEFGA}$$

حيث التكاملات على AH و HA و LQ و QL و TV و VT تلغي في أزواج وهذا يصبح

$$\begin{aligned}
 & \int_{HKL} + \int_{GST} + \int_{VWXY} + \int_{PQ} + \int_{LPH} + \int_{ABDEFGA} \\
 &= \left(\int_{HKL} + \int_{LPH} \right) + \left(\int_{GST} + \int_{PQ} \right) + \int_{VWXY} + \int_{ABDEFGA} \\
 &= \int_{HKLPH} + \int_{GSTPQ} + \int_{VWXY} + \int_{ABDEFGA} \\
 &= \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} + \int_{C_1} = \int_C
 \end{aligned}$$

حيث C هي المنحنيات المكونة من C_1 و C_2 و C_3 و C_4 إذن

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

كما هو مطلوب .

١٧ - أثبت أن $\oint_C M dx + N dy = 0$ حول كل منحنى مغلق C في منطقة بسيطة التوصيل إذا وإذا كان فقط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

في أي مكان في المنطقة .

افتراض أن M و N تكونا مستمرين ولهما مشتقات جزئية مستمرة ، في أي مكان في المنطقة R المحددة بـ C . بحيث أن نظرية جرين تكون قابلة للتطبيق . إذن

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_C M dx + N dy = 0 \quad \text{إذا كان} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{في} \quad R \quad \text{إذن يصبح}$$

$$\oint_C M dx + N dy = 0 \quad \text{وبالعكس . افترض} \quad \text{لكل منحنيات} \quad C$$

إذا كان $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0$ عند النقطة P . إذن من استمرارية المشتقات نحصل على

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} > 0 \quad \text{في منطقة} \quad A \quad \text{المجاورة لـ} \quad P$$

إذا كان Γ في حدود A إذن

$$\oint_{\Gamma} M dx + N dy = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy > 0$$

والتي تناقض الفرض أن التكامل الخطي يكون صفراً حول أي منحنى مغلق وبالمثل الفرض $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} < 0$

يؤدي إلى تناقض. لذلك $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$ عند كل النقط.

لاحظ أن الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ يكافئ الشرط $\nabla \times A = 0$ حيث $A = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$

(أنظر مسائل ١٠ و ١١ الفصل الخامس) قسمي لمنحنيات الفراغ. أنظر مسألة ٢١

١٢- ليكن $F = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ (١) احسب $\nabla \times F$ (ب) احسب $\oint F \cdot d\mathbf{r}$ حول أي مسار مغلق واشرح النتائج

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (١)$$

في أي منطقة ما عدا $(0,0)$

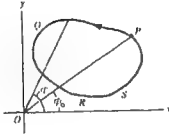
(ب) نيكس $\oint F \cdot d\mathbf{r} = \oint \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ حيث $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$ إحداثيات قطبية

$$\begin{aligned} dx &= -\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi, & dy &= \rho \cos \phi d\phi + d\rho \sin \phi \end{aligned} \quad \text{إذن}$$

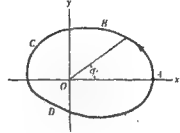
$$\frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = d\phi = d(\arctan \frac{y}{x}) \quad \text{وهكذا}$$

لنحسب مغلق $ABCD$ (شكل ٨-١) عملياً بنقطة الأصل، $\phi = 0$ عند A و $\phi = 2\pi$ عند D

كاملة تعود إلى A . في هذه الحالة التكامل الخطي يساوي $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$



(ب)



(أ)

شكل ٦ - أ

لنحس منق $PQSP$ (أنظر شكل ٦ - أ) ولا يحيط بنقطة الأصل $\phi = \phi_0$ عند P و $\phi = \phi_0$ عند Q . في هذه الحالة التكامل الخطي يساوي $\oint_{\partial D} d\phi = 0$

حيث $\nabla \times \vec{F} = 0$ ، $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j}$ ، تكافئ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. وتظهر النتائج كما لو أنها تنقض تلك التي في مسألة ١٢ . هل كل حال لا يوجد تناقض حيث $N = \frac{x}{x^2+y^2}$ و $M = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ليست لها مشتقات مفعمة خلال أي منطقة $(0,0)$ تحتوي وقد فرض ذلك في مسألة ١٢ .

نظرية التباعد :

١٤ - (أ) عبر عن نظرية التباعد في عبارات و (ب) اكتب هذه النظرية في الصيغة المفعمة .

(أ) التكامل الخطي المركبة المفعمة للجهة A مأخوذة على سطح منق مسار لتكامل التباعد للجهة A مأخوذة على الحجم الملق بالسطح .

$$\text{div } A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \quad \text{إذن} \quad A = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} \quad (\text{ب}) \text{ ليكن}$$

لوحدة المفعمة على S هي $\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k}$ ، إذن $\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ ، حيث α, β, γ هي الزوايا التي تصنعها مع الاتجاه الموجب لكل من المحاور x, y, z أو مع الاتجاهات $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بالتتال . فكيفات $\cos \alpha$ و $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ هي جيوب تمام الاتجاه للمود \vec{n} .

$$\begin{aligned} A \cdot n &= (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (\cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k) \\ &= A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma \end{aligned} \quad \text{إذن}$$

ويمكن كتابة نظرية التباعد

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma) dS$$

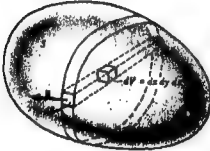
١٥ - وضع نظرية التباعد فيزيائياً

ليكن $A =$ السرعة v عند أى نقطة لمائع متحرك من شكل ١ - ٦ (أ) : حجم المائع الذى يمر SS في ثوان Δt

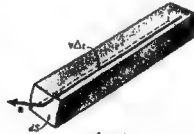
$=$ الحجم المحصر في أسطوانة قاعدتها dS وارتفاعها المائل $v \Delta t$

$$(v \Delta t) \cdot n \, dS = v \cdot n \, dS \, \Delta t$$

حيث $dS = v \cdot n \, dS$ حجم المائع الخارج في الثانية



شكل (ب)



شكل (أ)

شكل ١ - ٦

الحجم الكلى في الثانية [من شكل ١ - ٦ (ب)] المائع الذى يمر فيه من السطح المغلق

$$\iint_S v \cdot n \, dS =$$

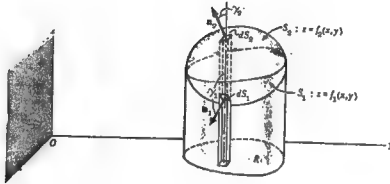
من مسألة ٢١ فصل ٤ ، $\nabla \cdot v \, dV$ هو حجم المائع الخارج في الثانية من حجم العناصر dV . إذن

الحجم الكلي الخارج في الثانية. في كل عناصر الحجم في S

$$= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV$$

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV \quad \text{لذلك}$$

١٩ - أثبت نظرية التفاضل



شكل ٦ - ١٠

ليكن S سطحاً مغلقاً بحيث أن أي خط مواز لمحاور الإحداثيات يقطع S في أكثر من نقطتين. افترض معادلات الأجزاء السفلى والعلوية S_1 و S_2 لتكون $z = f_1(x, y)$ و $z = f_2(x, y)$ على الترتيب. نعين إسقاط السطح على المستوى xy بالرمز R .

احضر

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} \, dV &= \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial z} \, dz \, dy \, dx = \iint_R \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z} \, dz \right] dy \, dx \\ &= \iint_R A_3(x, y, z) \Big|_{z=f_1}^{z=f_2} dy \, dx = \iint_R [A_3(x, y, f_2) - A_3(x, y, f_1)] dy \, dx \end{aligned}$$

لنقطة الأصل S_2 حيث $dy \, dx = \cos \gamma_0 \, dS_2 = k \cdot m_0 \, dS_2$ حيث γ_0 يصنع زاوية حادة γ_2

مع k

أجزاء الأسفل S_1 و S_2 حيث السطح n_2 على S_1 يصنع زاوية متدرجة γ_1 مع k

إذن

$$\iint_R A_0(x, y, f_2) dy dx = \iint_{S_2} A_0 k \cdot n_2 dS_2$$

$$\iint_R A_0(x, y, f_1) dy dx = - \iint_{S_1} A_0 k \cdot n_1 dS_1$$

$$\begin{aligned} \iint_R A_0(x, y, f_2) dy dx - \iint_R A_0(x, y, f_1) dy dx &= \iint_{S_2} A_0 k \cdot n_2 dS_2 + \iint_{S_1} A_0 k \cdot n_1 dS_1 \\ &= \iint_R A_0 k \cdot n dS \end{aligned}$$

بحيث أن

$$\iiint_V \frac{\partial A_0}{\partial z} dV = \iint_S A_0 k \cdot n dS \quad (١)$$

بالمثل ، بإسقاط S على محاور المستويات الأخرى

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x} dV = \iint_S A_1 k \cdot n dS \quad (٢)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_2}{\partial y} dV = \iint_S A_2 k \cdot n dS \quad (٣)$$

بجمع (١) ، (٢) و (٣)

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_0}{\partial z} \right) dV &= \iint_S (A_1 k + A_2 j + A_0 k) \cdot n dS \\ \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

أو

يمكن أن تمتد النظرية السطوح التي تكون أي خطوط موازية لحدود الأحداثيات تقابلها في أكثر من نقطتين . لتأسيس هذا الامتداد ، قسم المنطقة المغلقة S إلى مناطق أحسن سطحها يحقق هذا الشرط . الطريقة مشابه تلك التي استخدمت في نظرية جرين المستوى

$$١٧ - احسب \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{حيث} \quad \mathbf{F} = 4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k} \quad \text{و} \quad S \text{ هي سطح المكعب المحدد}$$

$$x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$$

باستخدام نظرية التباد يكون التكامل المطلوب مساويا

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right] dV \\ &= \iiint_V (4z - y) \, dV = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (4z - y) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (2x^2 - yz) \Big|_{z=0}^1 dy \, dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (2 - y) \, dy \, dx = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

يمكن أيضا حساب التكامل السطحي مباشرة كما في مسألة ٢٣ فصل ٥

$$١٨ - برهن نظرية التباد للنتيجة $A = 4xz\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ المنبثقة عن المنطقة بواسطة$$

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z=0 \quad \text{و} \quad z=3$$

$$\begin{aligned} &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2) \right] dV = \text{تكامل الحجم} \\ &= \iiint_V (4 - 4y + 2x) \, dV = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=0}^3 (4 - 4y + 2x) \, dz \, dy \, dx = 0 \end{aligned}$$

يتكون السطح S للسطح من القامة $S_1 (z=0)$ ، والقبة (الغشاء العلوى) $S_2 (z=3)$ ، والجزء المذهب $S_3 (x^2 + y^2 = 4)$ حيث

$$\begin{aligned} \text{التكامل السطحي} &= \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_3 \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS_3 \\ &\text{حيث أن } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{A} = 4xz\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{k}, \quad S_1 (z=0), \quad \text{على السطح} \end{aligned}$$

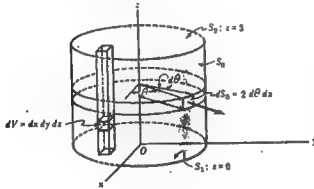
بحيث أن $A \cdot n = 0$ ، و $A = 4xi - 2y^2j + 9k$ ، $n = \frac{2xi + 2yj}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}$ ، على السطح S_2 ($z=3$)، $n = k$ ،

$$\iint_{S_2} A \cdot n \, dS_2 = 9 \iint_{S_2} dS_2 = 36\pi, \text{ since area of } S_2 = 4\pi$$

على السطح S_3 ($x^2 + y^2 = 4$)، السطح على $x^2 + y^2 = 4$ يكون له الاتجاه $\nabla(x^2 + y^2) = 2xi + 2yj$

$$n = \frac{2xi + 2yj}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{xi + yj}{2} \text{ since } x^2 + y^2 = 4$$

$$A \cdot n = (4xi - 2y^2j + z^2k) \cdot \left(\frac{xi + yj}{2}\right) = 2x^2 - y^2$$



من شكل ٦-١١

$$x = 2 \cos \theta, y = 2 \sin \theta, dS_0 = 2 d\theta dx \text{ and so}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} A \cdot n \, dS_0 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=0}^2 [2(2 \cos \theta)^2 - (2 \sin \theta)^2] 2 dx d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} (48 \cos^2 \theta - 48 \sin^2 \theta) d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 48 \cos^2 \theta d\theta = 48\pi \end{aligned}$$

إذا لتكامل السطحى $= 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$ ، يتفق مع تكامل الحجم ويحقق نظرية التفاضل .

لاحظ أن حساب التكامل السطحى على S_0 أيضاً يمكن أن نحصل عليه بإسقاط S_0 على محاور المصفوعات xy أو yz

١٩- إذا كانت $\text{div } A$ ترمز إلى تباعد مجال للجهة A عند نقطة P وبين أن

$$\text{div } A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} A \cdot n \, dS}{\Delta V}$$

حيث ΔV هو الحجم المحاط بالسطح ΔS والنهايات تحصل عليها بانكشاف ΔV إلى النقطة P .

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} A \, dV = \iint_{\Delta S} A \cdot n \, dS \quad \text{من نظرية التباين}$$

من نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات ، الطرف الأيسر من المعادلة يمكن أن يكتب على الصورة

$$\overline{\operatorname{div} A} \iiint_{\Delta V} dV = \overline{\operatorname{div} A} \, \Delta V$$

حيث $\operatorname{div} A$ هي قيمة متوسطة بين أكبر وأصغر قيمة لتباين $\operatorname{div} A$ خلال ΔV . إذن

$$\overline{\operatorname{div} A} = \frac{\iint_{\Delta S} A \cdot n \, dS}{\Delta V}$$

بأخذ النهايات مثل $\Delta V \rightarrow 0$ بحيث P تكون دائماً داخل ΔV ، $\operatorname{div} A$ تتقرب من القيمة $\operatorname{div} A$ عند النقطة P ، وبالتالي

$$\operatorname{div} A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} A \cdot n \, dS}{\Delta V}$$

هذه النتيجة يمكن أن تؤخذ كنقطة بداية لتعريف التباين المتجه A ، ومنها يمكن اشتقاق الخواص بما فيها إثبات نظرية التباين . في فصل ٧ يستخدم هذا التعريف لتوسيع مفهوم التباين لمتجه في نظام محاور مختلفة عن نظام المحاور العمودية فيزيائياً

$$\frac{\iint_{\Delta S} A \cdot n \, dS}{\Delta V}$$

تمثل التباين لكل وحدة الحجم لمتجه A من السطح ΔS . إذا كان $\operatorname{div} A$ موجباً في جيرة نقطة P يعني ذلك أن السريان الخارج من P يكون موجباً ونسبي P مصدر بالمثل إذا كان $\operatorname{div} A$ سالبة في جيرة النقطة P يكون السريان حقيقة فهو P وتسمى بالمصب . إذا كان في منطقة لا يوجد لها متجه فيزيائي . إذن $\operatorname{div} A = 0$ وتسمى A مجال متجه الحرة .

$$٢٠ - \text{احسب } \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \text{حيث } S \text{ سطح مثلث}$$

باستخدام نظرية التباديل

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{r} \, dV \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \, dV \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) dV = 3 \iiint_V dV = 3V \end{aligned}$$

حيث V يكون هو الحجم المحاط بالسطح S

$$٢١ - \text{أثبت} \quad \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

ليكن $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi$ في نظرية التباديل . إذن :

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \, dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{ولكن} \quad \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi (\nabla \cdot \nabla \psi) + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)$$

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) \, dV = \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] \, dV \quad \text{حيث}$$

$$(١) \quad \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] \, dV = \iint_S (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{أو}$$

حيث تكبت متطابقة جرين الأولى . بتبادل ϕ و ψ في (١)

$$(٢) \quad \iiint_V [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi)] \, dV = \iint_S (\psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

ب طرح (٢) من (١) ، لدينا

$$(٢) \quad \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot dS$$

التي تكون في مطابقة جرين الثانية أو نظرية المماثل . في الأدبات نرضاً أن ϕ و ψ تكون دوال عديدة للموضع لما مشتقات مستمرة من الرتبة الثانية على الأقل .

$$\iiint_V \nabla \phi \cdot dV = \iint_S \phi n \cdot dS \quad \text{٢٢- أليث}$$

في نظرية التفاضل ، ليكن $A = \phi C$ حيث C متجه ثابت .

إذن

$$\iiint_V \nabla \cdot (\phi C) dV = \iint_S \phi C \cdot n \cdot dS$$

حيث $\nabla \cdot (\phi C) = (\nabla \phi) \cdot C = C \cdot \nabla \phi$ and $\phi C \cdot n = C \cdot (\phi n)$.

$$\iiint_V C \cdot \nabla \phi dV = \iint_S C \cdot (\phi n) dS$$

بأخذ C خارج التكاملات

$$C \cdot \iiint_V \nabla \phi dV = C \cdot \iint_S \phi n dS$$

وحيث C متجه اختياري ثابت

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \phi n dS$$

$$\iiint_V \nabla \times B dV = \iint_S n \times B dS$$

٢٢- أليث

من نظرية التفاضل ، ليكن $A = B \times C$ حيث C يكون متجهاً ثابتاً .

إذن

$$\iiint_V \nabla \cdot (B \times C) dV = \iint_S (B \times C) \cdot n dS$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \text{ and } (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}), \quad \text{حيث}$$

$$\iiint_V \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV = \iint_S \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) dS$$

بأخذ \mathbf{C} خارج التكاملات

$$\mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{B} dV = \mathbf{C} \cdot \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B} dS$$

حيث \mathbf{C} متجه ثابت اختياري

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{B} dV = \iint_S \mathbf{n} \times \mathbf{B} dS$$

٧٤ - بين أنه عند أي نقطة

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS}{\Delta V} \quad \text{و (ب)} \quad \nabla \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} dS}{\Delta V} \quad (1)$$

حيث ΔV يكون هو الحجم المحاط بالسطح ΔS والنهاية تحصل عليها بانكماش الحجم ΔV إلى النقطة P

$$\iiint_{\Delta V} \nabla \phi \cdot \mathbf{i} dV = \iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS \quad \text{حيث} \quad \iiint_{\Delta V} \nabla \phi dV = \iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} dS \quad \text{و (أ) من المسألة ٧٢}$$

باستخدام نفس الأسس المستعمل في المسألة ٧٤ نحصل على

$$\overline{\nabla \phi \cdot \mathbf{i}} = \frac{\iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS}{\Delta V}$$

حيث \mathbf{i} تكون قيمة متوسطة بين أكبر وأصغر قيمة \mathbf{i} خلال ∇ بأخذ النهايات $\Delta V \rightarrow 0$ بحيث أن P تكون دائماً داخل ΔV و $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ تقرب من القيمة

$$(1) \quad \nabla \phi \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS}{\Delta V}$$

بالمثل نجد

$$(٢) \quad \nabla \phi \cdot \mathbf{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \, dS}{\Delta V}$$

$$(٣) \quad \nabla \phi \cdot \mathbf{k} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, dS}{\Delta V}$$

بضرب (١) ، (٢) ، (٣) بالكميات \mathbf{k} و \mathbf{j} و \mathbf{i} بالتتال والجمع استخدم

$$\nabla \phi = (\nabla \phi \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\nabla \phi \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\nabla \phi \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = (n \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (n \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (n \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

(أنظر مسألة ٢٠ فصل ٢) نحصل على النتيجة .

$$(ب) \quad \text{من مسألة ٢٣ استبدل } \mathbf{n} \text{ على } A \text{ و } \iint_{\Delta S} \mathbf{n} \times A \, dS = \iiint_{\Delta V} \nabla \times A \, dV$$

إذن كافي الجزء (أ) يمكننا أن نرى .

$$(\nabla \times A) \cdot \mathbf{i} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\mathbf{n} \times A) \cdot \mathbf{i} \, dS}{\Delta V}$$

بالمثل يمكن الحصول على النتائج مع إحلال \mathbf{j} و \mathbf{k} محل \mathbf{i} بالضرب في \mathbf{k} و \mathbf{j} و \mathbf{i} بالجمع نحصل على النتيجة .

النتائج التي حصلنا عليها يمكن أن تؤخذ كتقطة بداية لتعريف كل من الانحدار والاتساف ، باستخدام هذا التعريف يمكن التوسع في نظم المحاور لتشمل محاور مختلفة عن المحاور المربعة ،

٢٥ - كون حامل التكامل .

$$\nabla \cdot = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} dS$$

حيث \circ تميز الضرب المتجهي أو الضرب المتجهي أو الضرب المتجهي

لتكوين المكافئ ، نتائج العمليات على مجال المتجه أو المجال المبدى يجب أن تكون في توافق متساو مع النتائج السابق الحصول عليها .

إذا كانت ϕ تبين القرب المبدى ، إذا فلتعجه A .

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} dS \cdot A \\ \text{أو} \\ \text{div } A &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} dS \cdot A \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} A \cdot n \, dS\end{aligned}$$

المكون في مسألة ١٩ .

بالمثل إذا كانت ϕ تبين القرب المتجهي .

$$\begin{aligned}\text{curl } A &= \nabla \times A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} dS \times A \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} n \times A \, dS\end{aligned}$$

المكون في مسألة (٢٤ - ب) .

أيضاً إذا كانت ϕ تبين القرب المماسي ، إذا لكتبة متجهة ϕ .

$$\nabla \cdot \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} dS \cdot \phi \quad \text{or} \quad \nabla \phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Delta S} \phi \, dS$$

المكون في مسألة (٢٤ - أ) .

٢٦- ليكن S سطحاً مغلقاً وليكن x يرمز إلى متجه الموضع لأي نقطة (x, y, z) تبين من نقطة أصل . أثبت أن :

$$\iint_S \frac{n \cdot r}{r^3} \, dS$$

تكون مساوياً (أ) صفراً إذا كان O تقع خارج S (ب) 4π إذا كان O تقع داخل S تعرف هذه النتيجة بنظرية جاوس .

$$(1) \quad \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS = \iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dV$$

لكن $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} = 0$ (مسألة ١٩ فصل ٤) في أي مكان داخل V بفرض 0 محي r في V . أي أن $\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS = 0$ إذن S وبالتالي تكون خارج S .

(ب) إذا كانت O داخل S . أحط O بكرة صغيرة نصف قطرها a . ليكن τ ترمز إلى المنطقة المحددة بالسطح S و s إذن من نظرية التباديل .

$$\iint_{S \cup \tau} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS + \iint_\tau \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS = \iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dV = 0$$

حيث 0 محي r في τ . لذلك

$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS = - \iint_\tau \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS$$

الآن على $s, r=a, \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r}}{a}$ حيث أن $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} = \frac{(-\mathbf{r}/a) \cdot \mathbf{F}}{a^3} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{a^3} = -\frac{1}{a^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$

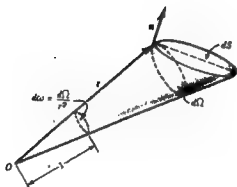
$$\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS = - \iint_\tau \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{r^3} dS = \iint_\tau \frac{1}{a^3} dS = \frac{1}{a^3} \iint_\tau dS = \frac{4\pi a^2}{a^3} = 4\pi$$

٢٧- المرح نظرية جاوس (مسألة ٢٦) هندسياً .

ليكن dS ترمز إلى عنصر من مساحة السطح وتصل كل النقط على حدود dS إلى O (شكل ١٢-٦) ، وبهذا تكون مخروطاً ليكن $d\Omega$ هي مساحة جزء من كرة مركزها O ونصف قطرها r ومقطوعة بهذا المخروط . إذن الزاوية الجسمة المقابلة بعنصر السطح dS عند O تعرف كالتالي :

$d\Omega = d\Omega \sin^2 \theta$ وتكون محدداً مساوياً لمساحة الجزء من الكرة التي مركزها O ونصف قطرها r والوحدة ومقطوعة بالمخروط . ليكن Ω وحدة الصود الموجه على dS ونسب θ لزاوية بين Ω و r إذن : $\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{rF}$ أيضاً

$d\Omega = \pm \frac{dS}{r^2} \cos \theta = \pm \frac{dS}{r^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{rF}$ حيث أن $d\Omega = \pm \frac{dS}{r^2} \cos \theta$. الموجه $(+)$ أو السالب $(-)$ اختيروا تبعاً لما إذا كان Ω و r تكون زاوية حادة أو منفرجة θ مع بعضهما .



شكل ١٢-٦

ليكن S عبارة عن سطح . شكل (٦-١٢-١) يثبت أن أي خط يقابل S في أكثر من نقطتين . إذا كان O

تقع خارج S ، إذن عند موضع مثل $d\omega$ $\frac{\partial F}{\partial x} dS = 1$ متبراً أنه عند الموضع المناظر ٢ .

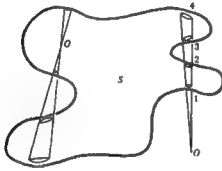
١١-٤-١ : التكامل على هاتين المنطقتين يساوي صفراً . حيث أن الإسهام الزاوية المجسمة تلتقي عند إجراء التكامل $\frac{\partial F}{\partial x} dS = 0$

على السطح S نحصل على $\iint_S \frac{\partial F}{\partial x} dS = 0$ ، حيث أنه لكل إسهام موجب يوجد واحد سالب .

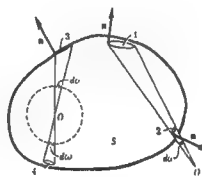
في حالة O داخل S بالرغم من أن عند موضع مثل ١٢ ، $\frac{\partial F}{\partial x} dS = d\omega$ وعند ١ $\frac{\partial F}{\partial x} dS = d\omega$

بمجرد أن الإسهام ينسب بدلا من أن يلقى الزاوية المجسمة الكلية في علم الحالة تسوى مساحة وحدة الكرة التي هي 4π ،

بمجرد أن $\iint_S \frac{\partial F}{\partial x} dS = 4\pi$



شكل (ب)



شكل (أ)

شكل ٦-١٢

السطح S بحيث أنه إذا قابل سطح S في أكثر من نقطتين فإن وضعاً مماثلاً يلاحظ يكون صالحاً كما هو مبين في شكل ١٢-٦ (ب) إذا كانت O خارج S مثلا إذن القروط التي رأسه عند O يقطع S في عدد زوجي من الأماكن والإسهام لتكامل السطح يساوي صفراً حيث الزاوية المجسمة للمائلة O تشطب في أزواج . إذا كانت O داخل S ومما من ، القروط يكون رأسه عند O يقطع S في عدد فردي من الأماكن حيث أن الالتقاء يقع فقط للأعداد الزوجية لها ، يوجد دائماً إسهام قيمته 4π السطح الداخل S

٧٨- مائع له الكثافة $\rho(x, y, z, t)$ يتحرك بسرعة $v(x, y, z, t)$ إذا كان لا يوجد منابع أو مصبات . اثبت أن :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{حيث} \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

اعتبر سطحاً اختيارياً يحيط حجم سائل V . عند أي زمن تكون كتلة السائل التي في حجم V هي :

$$M = \iiint_V \rho \, dV$$

سجل زمن الزيادة لهذه الكتلة هي :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

كتلة السائل لكل وحدة زمن تترك V هي :

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(أنظر مسألة ١٥) وسجل الزيادة في الكتلة تكون حينئذ :

$$- \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

إذاً من نظرية التباديل

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad \text{أو}$$

حيث تكون V اختيارية . التكامل متفرصاً مستمراً ، يجب أن تكون بالتساوي صفراً . باستخدام دليل مغاير المستخدم في المسألة ١٧ . إذاً :

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{حيث } \mathbf{s} = \rho \mathbf{v}$$

نفس هذه المعادلة معادلة استمرار . إذا كانت ρ ثابتة ، يكون السائل غير قابل للانضغاط ، $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ أي أن \mathbf{v} تكون لورينزي .

معادلة الاستمرار أيضاً مستخدمة في النظرية الكهرومغناطيسية حيث ρ كثافة الشحنة و $\mathbf{s} = \rho \mathbf{v}$ تكون كثافة التيار الكهربائي .

٢٩ - إذا كانت درجة الحرارة عند أي نقطة (x, y, z) جسم صلب عند زمن t يكون $U(x, y, z, t)$ وإذا كان ρ و c على الترتيب ، معامل التوصيل الحراري ، الكثافة والحرارة النوعية للجسم الصلب يفرض أنها ثابتة ، بين أن :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \nabla^2 U \quad \text{حيث } k = \kappa / \rho c$$

ليكن V هو حجم اختياري واقع في الجسم الصلب ، ولتكن S ترمز إلى سطحه ، معدل تدفق الحرارة عبر S أو كمية الحرارة التي تترك لكل وحدة زمن هي :

$$\iint_S (-\kappa \nabla U) \cdot n \, dS$$

لذلك كمية الحرارة الداخلة إلى S لكل وحدة زمن هي

$$(1) \quad \iint_S (\kappa \nabla U) \cdot n \, dS = \iiint_V \nabla \cdot (\kappa \nabla U) \, dV$$

من نظرية التفاضل ، الحرارة الموجودة في الحجم V تعطى بالمعادلة

$$\iiint_V \rho U \, dV$$

إذاً معدل زيادة الحرارة يكون :

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho U \, dV = \iiint_V \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dV$$

بتساوي الأطراف اليمنى لكل من (١) و (٢) :

$$\iiint_V \left[\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot (\kappa \nabla U) \right] dV = 0$$

وحيث V تكون اختيارية ، المتكامل ، المقتضى مستمراً يجب أن تكون بالتساوي صفراً حيث أن :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla U)$$

أو إذا كانت ρ و c و κ ثوابت

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \nabla \cdot \nabla U = k \nabla^2 U$$

الكبة k تسمى الانتشارية . في حالة استمرار انتقال الحرارة (أي أن $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ أو U مستقلة عن الزمن)
تتولد المعادلة إلى معادلة لا بلاس $\nabla^2 U = 0$.

نظرية ستوكس :

٣٠- (أ) جبر عن نظرية ستوكس في كلاً من (ب) اكبتها في الصيغة المزدوجة

(أ) التكامل الخطي المركبة المسماة لتجه A مأخوذة حول منحنى مغلق بسيط C تساوي تكامل السطح المركبة المزدوجة لالتفاف A مأخوذة على أي سطح S له الحسود C .

(ب) كما في مسألة ١٤ ب)

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad n = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$$

إذن

$$\begin{aligned} \nabla \times A &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) k \\ (\nabla \times A) \cdot n &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \\ A \cdot dr &= (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (dx i + dy j + dz k) = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \end{aligned}$$

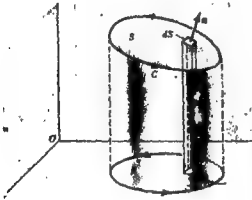
وتصبح نظرية ستوكس

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS = \oint_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

٣١- أثبت نظرية ستوكس .

لتكن S سطح حيث أن إسقاطه على المستويات xy و xz و yz تكون مناطق محددة بمنحنيات بسيطة متغلقة .
شكل ١٤-٦ افترض S يمكن تمثيلها بالمعادلات $x = f(x, y)$ أو $z = g(y, z)$ أو $y = h(x, z)$ حيث f, g, h هي دوال ذات قيم فردية ، مستمرة وتامة قطاعات لا بد أن يكون أن :

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times A) \cdot n \, dS &= \iint_S [\nabla \times (A_1 i + A_2 j + A_3 k)] \cdot n \, dS \\ &= \oint_C A \cdot dr \end{aligned}$$



حيث C هي حدود S

$$\iint_C [\nabla \times (A_1 \mathbf{h})] \cdot \mathbf{n} \, dS$$

حيث

شكل ٦-١

$$\nabla \times (A_1 \mathbf{h}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial x} \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{k}$$

(١)

$$[\nabla \times (A_1 \mathbf{h})] \cdot \mathbf{n} \, dS = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right) dS$$

إذا كان $z = f(x, y)$ معادلة السطح S ، إذن الاتجاه الموضعي لأي نقطة S يكون $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k} \quad \text{حيث أن } x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k} = \mathbf{r}$$

(أنظر مسألة ٢٠ فصل ٢) وتكون بالتالي عمودية على \mathbf{n} حيث أن :

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \text{أو} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$$

بالعويض في المعادلة (١) نحصل على

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right) dS = \left(-\frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right) dS$$

،

(٢)

$$[\nabla \times (A_1 \mathbf{h})] \cdot \mathbf{n} \, dS = -\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \, dS$$

الآن على السطح ،

$$A_1(x, y, z) = A_1(x, y, f(x, y)) = F(x, y); \text{ hence } \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \text{ and (2) becomes}$$

$$[\nabla \times (A_1 i)] \cdot n \, dS = - \frac{\partial F}{\partial y} n \cdot k \, dS = - \frac{\partial F}{\partial y} dx \, dy$$

إذن

$$\iint_S [\nabla \times (A_1 i)] \cdot n \, dS = \iint_R - \frac{\partial F}{\partial y} dx \, dy$$

حيث R هي إسقاط S على المستوى xy . من نظرية جرين المستوى فإن التكامل الأخير يساوي $\oint_{\Gamma} F \, dx$ حيث Γ هي حدود R . حيث أنه عند كل نقطة (x, y) المنتمية لـ Γ قيمة F هي نفس قيمة A_1 عند نقطة (x, y, z) من C وحيث dx لها نفس القيمة لكل من الممتحنين ويجب أن يكون :

$$\oint_{\Gamma} F \, dx = \oint_{\Gamma} A_1 \, dx$$

أو

$$\iint_S [\nabla \times (A_1 i)] \cdot n \, dS = \oint_{\Gamma} A_1 \, dx$$

بالمثل وبالإسقاط على محاور المستويات الأخرى .

$$\iint_S [\nabla \times (A_2 j)] \cdot n \, dS = \oint_{\Gamma} A_2 \, dy$$

$$\iint_S [\nabla \times (A_3 k)] \cdot n \, dS = \oint_{\Gamma} A_3 \, dz$$

فذلك بالجمع

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot n \, dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

تكون النظرية أيضاً صحيحة للأسطح S التي لا تحقق القيود المفروضة سابقاً . يفرض أن S يمكن قسمتها إلى أسطح S_1, S_2, \dots, S_n لها الحدود C_1, C_2, \dots, C_n والتي تحقق القيود . إذن نظرية ستوكس تكون صالحة لكل سطح . جميع تكاملات السطح هذه فالتكامل السطحي الكلي على S يمكن الحصول عليه . جميع التكاملات الخطية للمنظرة على C_1, C_2, \dots, C_n تحصل على التكامل الخطي على C .

٣٧- حقق نظرية ستوكس للنتيجة $A = (2x-y)1 - y^2z$ حيث S نصف السطح العلوي لكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ في حدودها .

الحدود C السطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها واحد ومركزها عند نقطة الأصل . ليكن $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, 0 \leq t < 2\pi$ هي المعادلة البارامترية للحدود C . إذن :

$$\begin{aligned} \oint_C A \cdot dr &= \int_0^{2\pi} (2x-y) dx - y^2 dy - y^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t) (-\sin t) dt = \dots \end{aligned}$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -y^2 & -y^2z \end{vmatrix} = k$$

$$\iint_S (\nabla \times A) \cdot n \, dS = \iint_S k \cdot n \, dS = \iint_S dx \, dy$$

حيث $\iint_S k \cdot n \, dS = dx \, dy$ في إسقاط S على المستوى xy هذا التكامل الأخير يساوي .

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \pi$$

وتكون نظرية ستوكس قد أثبتت .

٣٨- أثبت أن الشرط اللازم والكاف أن $\oint_C A \cdot dr = 0$ لكل مسطح C هو $\nabla \times A = 0$ مطابقاً .
الكافية . افترض $\nabla \times A = 0$ إذن من نظرية ستوكس .

$$\oint_C A \cdot dr = \iint_S (\nabla \times A) \cdot n \, dS = 0$$

الضرورة (اللازم) افترض $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ حول كل مسار مغلق C وافترض $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ عند

نقطة ما P إذن يفرض $\nabla \times \mathbf{A}$ تكون مستمرة متوحد منطقة وتكون P كنقطة داخلية فيها . حيث $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ يمكن أن S سطح مغلق في هذه المنطقة إلى المسود عليها . عند كل نقطة له نفس الاتجاه مثل $\nabla \times \mathbf{A}$ أي أن $\nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{n}$ حيث α ثابت موجب . ليكن C هي حدود S إذن من نظرية ستوكس .

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \alpha \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \, dS > 0$$

وهذا يتناقض الفرض أن $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$ وبين أن $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

وننتج أن $\Delta \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ هو أيضاً شرط لازم وكاف للتكامل المغلق $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ ليكون مستقلاً عن المسار
الواصل بين النقط P_1 و P_2 (أنظر مسائل ١٠ و ١١ - الفصل الخامس)

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS \quad \text{٧٤ - المبرهن :}$$

في نظرية ستوكس ، ليكن $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ حيث C متجه ثابت .

إذن

$$\oint_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \iint_S [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\oint_C \mathbf{C} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\mathbf{C} \cdot \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_S [\mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$= \iint_S \mathbf{C} \cdot [\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] \, dS - \iint_S \mathbf{C} \cdot [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \, dS$$

$$= \mathbf{C} \cdot \iint_S [\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \, dS = \mathbf{C} \cdot \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS$$

$$\oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS \quad \text{حيث } C \text{ متجه اختياري ثابت}$$

٣٥- إذا كان ΔS سطحاً محدداً بمنحنى مغلق بسيط C و P أى نقطة السطح ΔS وليست على C و n تكون وحدة العمود على ΔS عند P ، بين أنه عند P

$$(\text{curl } A) \cdot n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C A \cdot dr}{\Delta S}$$

حيث أخذت النهاية بطريقة بحيث أن ΔS تشكل إلى النقطة P

$$\iint_{\Delta S} (\text{curl } A) \cdot n \, dS = \oint_C A \cdot dr$$

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات كما في مسائل ١٩ ، ٢٤ يمكن أن تكتب المادة كل الصورة .

$$\frac{\oint_C A \cdot dr}{(\text{curl } A) \cdot n} = \Delta S$$

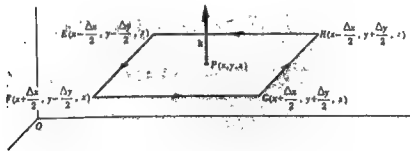
ونحصل على النتيجة المطلوبة بأخذ النهاية كالتالى $\Delta S \rightarrow 0$

يمكن استخدام ذلك كنقطة بداية لتعريف الانفاف $\text{curl } A$ (أنظر مسألة ٢٦) وهي مفيدة في الحصول على

الانفاف $\text{curl } A$ في نظم الإحداثيات المختلفة عن المودية . حيث $\oint_C A \cdot dr$ تسمى الدوران المتجه A

حول C ، فإن المركبة المودية للانفاف يمكن شرحها فيزيائياً كنهاية الدوران لكل وحدة مساحة ولذلك فحساب الدوران بمباراة أخرى للنتيجة $(\text{rot } A)$ بدلاً من انفاف $\text{curl } A$.

٣٦- إذا كان انفاف $\text{curl } A$ معرف تبعاً لطريقة النهايات كما في مسألة ٣٥ . أوجد المركبة x للانفاف $\text{curl } A$.



شكل ١٥-٦

ليكن $EFGH$ مستطيلاً يوازي المستوى xy له النقطة الداخلية $P(x, y, z)$ أخذت كنقطة متوسطة كما بشكل ٦-١٥. ليكن A_1 و A_2 هي مركبتا المتجه A عند P في الاتجاه الموجب x و y على الترتيب.

إذا كانت C هي حدود المستطيل، إذن

$$\oint_C A \cdot dr = \int_{EF} A \cdot dr + \int_{FG} A \cdot dr + \int_{GH} A \cdot dr + \int_{HS} A \cdot dr$$

$$\int_{EF} A \cdot dr = (A_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial y} \Delta y) \Delta x \quad \int_{GH} A \cdot dr = -(A_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial y} \Delta y) \Delta x \quad \text{ولكن}$$

$$\int_{FO} A \cdot dr = (A_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \Delta x) \Delta y \quad \int_{EH} A \cdot dr = -(A_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \Delta x) \Delta y$$

مما عدا الأجزاء متناهية الصغر ذات رتبة أعلى من $\Delta x \Delta y$

$$\oint_C A \cdot dr = (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}) \Delta x \Delta y \quad \text{بالجمع، لدينا تقريباً}$$

إذن، حيث $\Delta S = \Delta x \Delta y$

$$\begin{aligned} (\text{curl } A) \cdot h &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C A \cdot dr}{\Delta S} = A \text{ مركبة } z \text{ للانحناء} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \\ &= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{aligned}$$

مسائل متنوعة

٣٧ - حقق نظرية جرينز في المستوى $\oint_C (3x^2 - 6y^2)dx + (4y - 6xy)dy$ حيث C هي حدود المنطقة المعرفة بواسطة

$$x=0, y=0, x+y=1 \quad (\text{ب}) \quad y=\sqrt{x}, y=x^2 \quad (\text{أ})$$

الجواب (أ) قيمة مشتركة $= 3/2$ (ب) قيمة مشتركة $= 5/3$

٣٨ - احسب $\oint_C (3x+4y)dx + (2x-3y)dy$ حيث C دائرة نصف قطرها 2 ومركزها عند نقطة الأصل المستوى xy ,

تحركت في الاتجاه الموجب . الجواب . -8π

٣٩ - أمد حل المسألة السابقة لتتكامل الخطى $\oint_C (x^2+y^2)dx + 3xy^2 dy$ الجواب . 12π

٤٠ - احسب $\oint_C (x^2-2xy)dx + (xy^2+3)dy$ حول الحدود المنطقة المعرفة بالمعادلة $x=2$ و $y^2=8x$

(أ) مباشرة (ب) باستخدام نظرية جرين الجواب . $128/5$

٤١ - احسب $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)} (6xy-y^2)dx + (3x^2-2xy)dy$ على طول الدويرى $x=0 \rightarrow \sin \theta, y=1 \rightarrow \cos \theta$

الجواب . $6\pi^2 - 4\pi$

٤٢ - احسب $\oint_C (3x^2+2y)dx - (x+3\cos y)dy$ حول متوازي الاضلاع الذى رؤوسه $(0,0)$ و $(2,0)$

و $(1,1)$ الجواب . -6

٤٣ - أوجد المساحة المحددة لقوس واحد من الدويرى $\theta > 0, y = a(1 - \cos \theta), x = a(\theta - \sin \theta)$, ومحور x .

الجواب $3\pi a^2$

٤٤ - أوجد المساحة المحددة بالمنحنى الدويرى المعنى $\theta > 0, x = a^2 \theta + y^2 = a^2$.

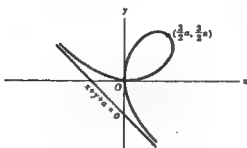
ملحوظة : المعادلة البارامترية هي $x = a \cos^2 \theta, y = a \sin^2 \theta$ الجواب $3\pi a^2/8$

٤٥ - بين أنه في الأعدادات للتقليدية (ρ, ϕ) التعبير $\rho^2 d\phi - y dx + x dy = \frac{1}{2} \int x dy - y dx$ اشرح

٤٦ - أوجد مساحة الأنشطة لوردة ذات الأربع ورفات $\phi = 3 \sin \theta$ ثمر . الجواب $9\pi/8$

٤٧ - أوجد مساحة كل من أنشوطتين المنحنى ذو عروقتين $\rho^2 = a^2 \cos 2\phi$. الجواب a^2

٤٨ - أوجد مساحة أنشوطة القوس الورق للمسكارات $a > 0, x^2 + y^2 = 2axy$. (أنظر شكل ١٦-١٧)



شكل ٦-١٦

ملحوظة ليكن $y = dx$ ولوجود المعادلة البارامترية
لننتج ثم استخدم الحقيقة أن

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} \oint x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \oint x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \oint x^2 dx \end{aligned}$$

الجواب $3\sigma^2/2$

٤٩ - حقق نظرية جرين في المستوى المعادلة $(2x-y^2)dx - xy dy$ حيث C هي حدود المنطقة المحاطة بالفرق

الجواب : قيمة مشتركة 60π

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ and } x^2 + y^2 = 9$$

٥٠ - احسب $\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ على المسارات الآتية :

(أ) عطف مستقيم مقطع من $(1, 0)$ إلى $(1, 1)$ ثم إلى $(-1, 1)$ ثم إلى $(-1, 0)$.(ب) عطف مستقيم مقطع من $(1, 0)$ إلى $(1, -1)$ ثم إلى $(-1, -1)$ ثم إلى $(-1, 0)$.

بين أنه ولو أن $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}$ يكون التكامل الخطي معتمداً على المسار القواسم بين $(1, 0)$ إلى $(-1, 0)$ والفرق

الجواب : (أ) π (ب) $-\pi$

٥١ - بتغيير المتغيرات من (x, y) إلى (u, v) تبيناً لتحويل $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ بين أن المساحة A لمنطقة R المحددة بمنحني بسيط مغلقة C يعطى كالآتي

$$A = \iint_R \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv \text{ حيث } J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

هو الجاكوبيان لتبني x و y بالنسبة إلى u و v . ما هي التهود التي يجب أن توضع؟ وضع النتيجة حيث u و v إحداثيات قطبية

توضيح : استخدم النتيجة $A = \frac{1}{2} \oint x dy - y dx$ حول C إلى إحداثيات u و v ثم استخدم نظرية جرين

٥٢ - احسب $\iint_S F \cdot n dS$ حيث $F = 2xy^2 + yz^2 + xz^2$ و S تكون :

(أ) سطح متوازي المستطيلات محدد بالآتي $z=3$ و $z=1$ و $x=2$, $y=1$ و $x=0$, $y=0$, $z=0$.(ب) سطح المنطقة المحددة بالتالي $x+2z=6$ و $x=0$, $y=0$, $y=2$, $z=0$.الجواب (أ) 30 (ب) $351/2$

٥٢ - حقق نظرية التباين لـ $A = 2xz^2 + y^2 - 4xz^2$ المأخوذة على المنطقة التي في الشئ الأول والمحددة بالتالي $x=2$ و $y^2+z^2=9$ الجواب : 180

٥٤ - احسب $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS$ حيث (أ) S هي كرة نصف قطرها 2 ومركزها عند $(0, 0, 0)$ و (ب) S سطح

المكعب محدد بما يلي : $x=-1, y=-1, z=-1, x=1, y=1, z=1$ (ج) S هي السطح المحدد بواسطة جسم لمقطع المكافئ الدوراني $(x^2+y^2)=4-z$ والمستوى xy الجواب (أ) 32π (ب) 24π (ج) 24π

٥٥ - إذا كانت S أي سطح مغلق يحتمل حجم V و $A = axi + byj + czk$ أثبت أن $\iint_S A \cdot \mathbf{n} \, dS = (a+b+c)V$

٥٦ - إذا كان $\mathbf{M} = \text{curl } A$ أثبت أن $\iint_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ لأي سطح مغلق S .

٥٧ - إذا كان \mathbf{M} هي وحدة السهم المرسوم إلى الخارج على أي سطح مغلق له المساحة S ، بين أن $\iiint_V \text{div } \mathbf{M} \, dV = S$

٥٨ - أثبت أن $\iiint_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}}{r^3} \, dV = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}}{r^3} \, dS$

٥٩ - أثبت $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{M} \, dS = \iiint_V \mathbf{r} \cdot \mathbf{M} \, dV$

٦٠ - أثبت $\iint_S \mathbf{M} \, dS = 0$ لأي سطح مغلق S .

٦١ - بين أن مطابقة جرين الثانية يمكن أن تكتب $\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV = \iint_S (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) \, dS$

٦٢ - أثبت $\iiint_V \mathbf{r} \times dS = 0$ لأي سطح مغلق S .

٦٣ - حقق نظرية ستوكس المتجه $A = (y-z+2)i + (yz+4)j - xzk$ حيث S هو سطح المكعب $x=0, y=0, z=0, x=2, y=2, z=2$ فوق المستوى xy الجواب : قيمة مشتركة $= -4$

٦٤ - حقق نظرية ستوكس لقيمة $F = xxi - yj + z^2k$ حيث S هي سطح المنطقة المحددة بواسطة $x^2+y^2+z^2=8$ التي لا يحتويها المستوى xy الجواب : قيمة مشتركة $= 32/3$

٦٥ - احسب $\iint_S (\nabla \times A) \cdot \mathbf{n} \, dS$ حيث $A = (x^2+y-4)i + 3xyj + (2xz+z^2)k$ و S هي السطح

(أ) نصف الكرة $x^2+y^2+z^2=16$ فوق المستوى xy .

(ب) جسم السطح المكافئ الدوراني $(x^2+y^2)=4-z$ فوق المستوى xy .

الجواب : (أ) -16π (ب) -4π

١٦- إذا كان $A = 2y + 1 - (x + 2y - 2)z + (x^2 + y^2)k$ ، احسب $\iint_S (\nabla \times A) \cdot n \, dS$ على السطح المقطاع بين الأسطوانتين

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z^2 + y^2 = a^2, \quad \text{الموجودة في النصف الأول} \quad \text{الجواب } -\frac{a^2}{12}(3\pi + 8a)$$

١٧- المتجه B دائماً محدد على سطح مغلق معلوم S . بين أن $\iiint_V \operatorname{curl} B \, dV = 0$ حيث V من المنطقة المحددة بالسطح S .

١٨- إذا كان $\oint_C E \cdot dr = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S B \cdot dS$ حيث S أي سطح محدد بالمنحنى C ، بين أن $\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$

$$١٩- \text{أثبت } \oint_C \phi \, dr = \iint_S dS \times \nabla \phi$$

٢٠- استخدم العامل التفاضلي لحل مسألة ٢٠هـ لتصل إلى (١) $\nabla \phi \cdot A$ (ب) $\nabla \cdot A$ (ج) $\nabla \times A$ في الأسئالات المبردة.

$$٢١- \text{أثبت } \iiint_V \nabla \phi \cdot A \, dV = \iint_S \phi A \cdot n \, dS - \iint_V \phi \nabla \cdot A \, dV$$

٢٢- لتكن r أي متجه موضعي لأي نقطة بالنسبة إلى الأصل O افترض ϕ لها مشتقات مستمرة من الرتبة الثانية على الأقل وليكن حجم V محدد بـ سطح مغلق S . بين ϕ على O بواسطة ϕ بين أن

$$\iint_S \left[\frac{1}{r} \nabla \phi - \phi \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS = \iint_V \frac{\nabla^2 \phi}{r} \, dV + \alpha$$

حيث $\alpha = 0$ أو $4\pi\phi$ تبع ما إذا كان O داخل أو خارج S .

٢٣- الجهد $\phi(P)$ عند نقطة $P(x, y, z)$ تبعاً لنظام شحنات (أو كتل) q_1, q_2, \dots, q_n له المتجهات الموضعية r_1, r_2, \dots, r_n بالنسبة إلى النقطة P على العلاقة

$$\phi = \sum_{n=1}^n \frac{q_n}{r_n}$$

$$\text{أثبت قانون جاوس } \iint_S E \cdot dS = 4\pi Q$$

حيث $\phi = -\int E \cdot dr$ شدة المجال الكهربائي، S هي السطح المغلوق كل الشحنات و $Q = \sum_{n=1}^n q_n$ هي الشحنة الكلية في S

٢٤- إذا كانت المنطقة V المحددة بالسطح S لها شحنات (أو كتل) مستمرة موزعة بكثافة ρ الجهد $\phi(P)$ تعرف بواسطة
$$\phi = \iiint_V \frac{\rho \, dV}{r}$$
 استنتج الآتي تحت فروض مناسبة.

$$(١) \iint_S E \cdot dS = 4\pi \iint_V \rho \, dV \quad \text{حيث } (٢) \nabla \phi = -E$$

(ب) $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$ (معادلة بواسون) عند كل نقطة P حيث توجد الشحنات و $\nabla^2 \phi = 0$ (معادلة لابلاس) حيث لا توجد شحنات.

الفصل السابع

احداثيات منحنى الانحلال

تحول الاحداثيات : نتكهن الاحداثيات الموضعية (x, y, z) لأي نقطة يعبر عنها كدالة في (u_1, u_2, u_3) بحيث أن :

$$(1) \quad x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3)$$

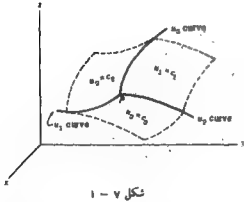
تفرض أن المادة (١) يمكن أن تحل في u_1, u_2, u_3 بدلالة (x, y, z) أي أن :

$$(2) \quad u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z)$$

الدوال في معادلات (١) و (٢) فرضت أن لها قيمة فردية ولها مشتقات مستمرة بحيث أن التقاطع بين (x, y, z) و (u_1, u_2, u_3) يكون وحيداً (فريداً) . عليها فإن هذا الفرض يجوز أن لا يطبق عند نقط معينة ويطلب اعتبارات خاصة .

أصلحت نقطة P بالاحداثيات الموضعية (x, y, z) ويمكننا من الصيغة (٢) أن نقال مجموعة معينة من الاحداثيات (u_1, u_2, u_3) تسمى احداثيات منحنى الانحلال للنقطة P . مجموعة المعادلات (١) أو (٢) تعرف باحداثيات التحول .

احداثيات منحنى الانحلال المتعامدة :



السطوح $u_1 = c_1$ ، $u_2 = c_2$ ، $u_3 = c_3$ حيث c_1, c_2, c_3 تكون ثوابت تسمى احداثيات السطوح وكل زوج من هذه السطوح تتقاطع في منحنيات تسمى احداثيات المنحنيات أو الخطوط شكل ٧ - ١ . إذا تقاطعت احداثيات السطوح في زاوية قائمة يسمى نظام احداثيات منحنى الانحلال احداثيات منحنى الانحلال المتعامدة . احداثيات المنحنيات u_1, u_2, u_3 نظام منحنى الانحلال تشابه عاود الاحداثيات x, y, z في نظام الاحداثيات الموضعية .

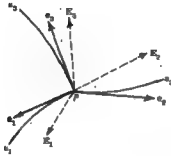
وحدة الاتجاه في نظم منحنى الانحلال : ليكن $r = xi + yj + zk$ متجه الموضع للنقطة P . إذن المادة (١) يمكن

كتبتها على الصورة : $r = r(u_1, u_2, u_3)$. متجه المماس المنحني u_1 عند P

(أي لها u_1 و u_2 ثوابت) هي $\frac{\partial r}{\partial u_1}$. إذن وحدة المتجه المماس في هذا الاتجاه تكون $\left| \frac{\partial r}{\partial u_1} \right|$. حيث $e_1 = \frac{\partial r}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial r}{\partial u_1} \right|$. حيث أن $e_1 = h_1 \frac{\partial r}{\partial u_1}$ حيث $h_1 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_1} \right|$. مثل ، إذا كان e_2 و e_3 هي وحدة المتجهات المماسية لمنحنيات u_1 و u_2 عند النقطة P على الترتيب

إذن $e_2 = \frac{\partial r}{\partial u_2}$ و $e_3 = \frac{\partial r}{\partial u_3}$ حيث $h_2 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_2} \right|$ و $h_3 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_3} \right|$. الكميات h_1, h_2, h_3 تسمى معاملات القياس. وحدة المتجهات e_1, e_2, e_3 هي اتجاهات تزايد u_1, u_2, u_3 على الترتيب.

حيث ∇u_1 متجه عند P عمودى على السطح $C_1 = u_1$ فإن وحدة المتجه في هذا الاتجاه تسمى بالعميقة $E_1 = \nabla u_1 / |\nabla u_1|$ بالمثل وحدة المتجهات $E_2 = \nabla u_2 / |\nabla u_2|$ and $E_3 = \nabla u_3 / |\nabla u_3|$ تكون عمودية على السطح $C_2 = u_2$ و $C_3 = u_3$ على الترتيب.



(شكل ٧-٢)

لذلك عند كل نقطة P لنظام منحنى الأسطح يوجد عموداً لثلاث من وحدة المتجهات e_1, e_2, e_3 تكون ماسة لإحداثى المنحنيات ويكون E_1, E_2, E_3 عمودية على أسطحيات السطح (شكل ٧-٢). تصبح القنات مائلة إذا كان فقط نظام إحداثيات منحنى الأسطح متعامداً (أنظر مسألة ١٩). كلتا القنيتين تشابه وحدة المتجهات E_1, E_2, E_3 في الإحداثيات المتعامدة ولكن لاتشابهها في أنها قد تغير الاتجاهات من نقطة إلى أخرى. يمكن تبين (أنظر مسألة ١٥) أن القنات $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_3}$ و $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ متجهات متعامدة.

المتجه A يمكن أن يمثل بدلالة وحدة المتجهات الأساسية e_1, e_2, e_3 أو E_1, E_2, E_3 في الصيغ:

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 = e_1 E_1 + e_2 E_2 + e_3 E_3$$

حيث A_1, A_2, A_3 وكذلك e_1, e_2, e_3 هي بالترتيب مركبات A في كل نظام.

أيضاً يمكننا أن نمثل المتجه A بدلالة المتجهات الأساسية $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_3}$ أو $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ والتي تسمى بمتجهات الوحدة الأساسية ولكن على العموم ليست هي وحدة المتجهات. إذ، هذه الحالة.

$$A = C_1 \frac{\partial r}{\partial u_1} + C_2 \frac{\partial r}{\partial u_2} + C_3 \frac{\partial r}{\partial u_3} = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3$$

$$A = c_1 \nabla u_1 + c_2 \nabla u_2 + c_3 \nabla u_3 = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3$$

حيث C_1, C_2, C_3 تسمى المركبات المتضادة للاختلاف المتجه A وتسمى c_1, c_2, c_3 للمركبات المتضادة للاختلاف

المتجه A (أنظر مسائل ٢٢ و ٢٤) لاحظ أن $\frac{\partial r}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial r}{\partial u_p} = \nabla u_p \cdot \nabla u_p = 1, 2, 3$

طول القوس وعناصر الحجم : من $r = r(u_1, u_2, u_3)$ لدينا

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial r}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial r}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 e_1 + h_2 du_2 e_2 + h_3 du_3 e_3$$

إذن طول القوس المتفاضل ds يحسب من $ds^2 = dr \cdot dr$
من النظام المتعامدة $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0$

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$$

النظم غير المتعامدة أو النظم العامة لمنحنى الأسلاك . (أنظر مسألة ١٧)

على طول المنحنى u_1 وإذا كانت u_2 و u_3 ثابتة فإبقت u_1 على طول u_1 $ds = h_1 du_1$ إذن طول القوس المتفاضل ds على طول u_1 عند P تكون h_1 . بالمثل أطوال الأقسام المتفاضلية على طول u_2 و u_3 عند النقطة P يكون $ds_2 = h_2 du_2$, $ds_3 = h_3 du_3$.

بالرجوع إلى (شكل ٧-٣) يكون عنصر الحجم لنظام إحداثيات منحنى الأسلاك المتصلب يعطى بالمعادلة .

$$dV = |(h_1 du_1 e_1) : (h_2 du_2 e_2) \times (h_3 du_3 e_3)| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

$$\text{حيث } |e_1 \cdot e_2 \times e_3| = 1$$

الانحدار ، التباديل والاشتقاق : يمكن التعبير عن بدالة إحداثيات منحنى الأسلاك . إذا كانت Φ دالة عددية و $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$ دالة متجه لإحداثيات منحنى الأسلاك المتعامدة u_1, u_2, u_3 إذن النتائج الآتية صالحة

$$\nabla \Phi = \text{grad } \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} e_3 \quad - ١$$

$$\nabla \cdot A = \text{div } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad - ٢$$

$$\nabla^2 \Phi = \text{Laplacian of } \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \quad - ٣$$

$$\nabla \times A = \text{curl } A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad - ٤$$

إد. e_1, e_2, e_3 و $\hat{h}_1 = \hat{h}_2 = \hat{h}_3 = 1$ بدلت الكيات k, j, i فإن هذه تتحول إلى التعبير المادى فى الإحداثيات المبردية حيث (u_1, u_2, u_3) تحل محل (x, y, z)

إستمداد النتائج السابقة يمكن الوصول إليها بالنظرية الأكثر عموماً لنظم محلى الأضلاع باستخدام طرق تحليل الكيات الممتدة التى سوف تؤخذ فى الإعتبار فى الباب (٨)

نظم الإحداثيات الخاصة المتعامدة :

(١) الإحداثيات الأسطوانية : (ρ, ϕ, z) (أنظر شكل ١ - v)

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

حيث $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$

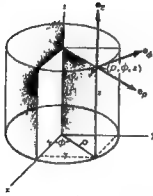
$$\hat{h}_\rho = 1, \quad \hat{h}_\phi = \rho, \quad \hat{h}_z = 1$$

(٢) الإحداثيات الكروية : (r, θ, ϕ) (أنظر شكل ٢ - v)

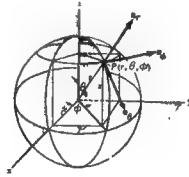
$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

حيث $r \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$$\hat{h}_r = 1, \quad \hat{h}_\theta = r, \quad \hat{h}_\phi = r \sin \theta$$



شكل ١ - v



شكل ٢ - v

(٣) الإحداثيات الأسطوانية لقطع مكافئ : (u, v, z) (أنظر شكل ٣ - v)

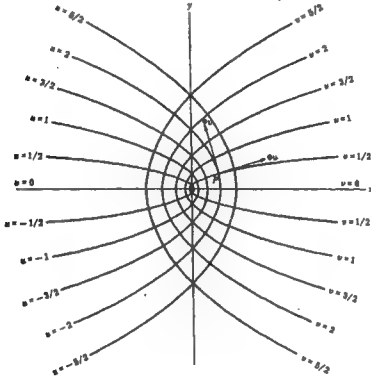
$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z$$

حيث $-\infty < u < \infty, \quad v \geq 0, \quad -\infty < z < \infty$

$$\hat{h}_u = \hat{h}_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \hat{h}_z = 1$$

فى الإحداثيات الأسطوانية $u = \sqrt{2\rho} \cos \frac{\phi}{2}, \quad v = \sqrt{2\rho} \sin \frac{\phi}{2}, \quad z = z$

المسارات لإحداثى السطح على المستوى xy مبنية (بشكل $v-u$) وحى أنقطاع مكافئة متحدة البؤرة بمحور مشترك k .



شكل ٦-٧

٤ - أحداثيات جسم قطع مكافئ : (u, v, ϕ)

$$x = uv \cos \phi, \quad y = uv \sin \phi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

$$\text{حيث} \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\phi = uv$$

ننتان من إحداثى السطح يمكن الحصول عليها بدوران القطع المكافئ (شكل ٦-٧) حول محور x الى بعد ترفيقه بمحور z . الفئة الثالثة من إحداثى السطح هي مستويات تمر بخلل هذا المحور .

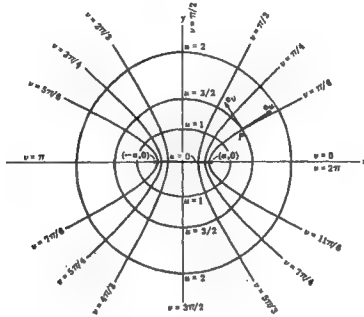
٥ - الإحداثيات الأسطوانية لقطع ناقص : (u, v, z) (أنظر شكل ٧-٧)

$$x = a \cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sin v, \quad z = z$$

$$\text{حيث} \quad u \geq 0, \quad 0 \leq v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

$$h_u = h_v = a \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad h_z = 1$$

المسارات لإحداثى السطح على المستوى xy مبنية في (شكل ٧-٧) وحى تكون قطعاً ناقصاً وزائياً منقطع البؤرة .



شكل ٧-٧

٦ - إحداثيات شبه الكرة المتطاول : (ξ, η, ϕ)

$$x = a \sinh \xi \sin \eta \cos \phi, \quad y = a \sinh \xi \sin \eta \sin \phi, \quad z = a \cosh \xi \cos \eta$$

$$\text{حيث} \quad \xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_\phi = a \sinh \xi \sin \eta$$

فتتألف من إحداثيات السطوح يمكن الحصول عليها بتدوير المنحنيات التي في (شكل ٧-٧) حول محور x ولفي
بمسي محور z . المجموعة الثلاثة من إحداثيات السطوح تكون مستويات تمر خلال هذا المحور.

٧ - إحداثيات شبه الكرة المفلطحة : (ξ, η, ϕ)

$$x = a \cosh \xi \cos \eta \cos \phi, \quad y = a \cosh \xi \cos \eta \sin \phi, \quad z = a \sinh \xi \sin \eta$$

$$\text{حيث} \quad \xi \geq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_\phi = a \cosh \xi \cos \eta$$

فتتألف من إحداثيات السطوح يمكن الحصول عليها بإدارة المنحنيات في (شكل ٧-٧) حول المحور y إلى
أبعد ترتيبه بمحور z . المجموعة الثلاثة لإحداثيات السطوح تكون مستويات تمر خلال هذه المحاور

٨ - إحداثيات القطع الناقص : (u, v, w)

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1, \quad \lambda < c^2 < b^2 < a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} + \frac{z^2}{c^2 - \mu} = 1, \quad a^2 < \mu < b^2 < c^2$$

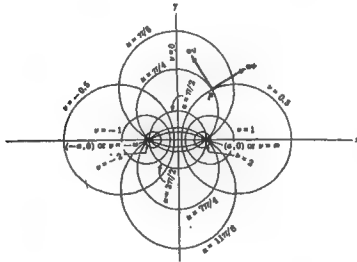
$$\frac{x^2}{a^2 - \nu} + \frac{y^2}{b^2 - \nu} + \frac{z^2}{c^2 - \nu} = 1, \quad c^2 < b^2 < \nu < a^2$$

$$h_\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)}}, \quad h_\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)}}$$

$$h_\nu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)}}$$

٤ - الإحداثيات القطبية (نظر شكل A - v)

$$x^2 + (y - a \cot u)^2 = a^2 \csc^2 u, \quad (x - a \coth v)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{cosech}^2 v, \quad z = z$$



(شكل A - v)

$$x = \frac{a \sinh v}{\cosh v - \cos u}, \quad y = \frac{a \sin u}{\cosh v - \cos u}, \quad z = z$$

حيث $0 \leq u < 2\pi, -\infty < v < \infty, -\infty < z < \infty$ أو

$$h_u = h_v = \frac{a}{\cosh v - \cos u}, \quad h_z = 1$$

ارسم الإحداثيات المطروح على المستوى xy مبنية في (شكل A - v) بإدارة المنحنيات التي في (شكل A - v) حول محور y وإحداثيات المحاور بمحور z تكون قد حصلنا على نظام الإحداثيات الجبلية .

مسائل وحلول

١ - اشرح إحداثى السطح وإحداثى المنحنيات للآتي (أ) الاسطوانة و (ب) إهائيات كروية .

(أ) إهائى السطح (أو مستوى السطح) تكون

$$c_1 = \rho = \text{اسطوانة متحدة المحاور مع محور } z \text{ (أو محور } x \text{ إذا كان } c_1 = 0 \text{)} .$$

$$c_2 = \phi = \text{مستويات خلال محور } z .$$

$$c_3 = z = \text{مستويات عمودية على محور } z .$$

تكون إهائى المنحنيات هى :

$$\text{تقاطع } c_1 = \rho \text{ و } c_2 = \phi \text{ (منحنى } z \text{) هو خط مستقيم .}$$

$$\text{تقاطع } c_1 = \rho \text{ و } c_3 = z \text{ (منحنى } \phi \text{) هو دائرة أو نقطة .}$$

$$\text{تقاطع } c_2 = \phi \text{ و } c_3 = z \text{ (منحنى } \rho \text{) هو خط مستقيم}$$

(ب) إهائى السطح تكون

$$c_1 = r = \text{كرات مركزها عند الأصل (أو الأصل إذا كان } c_1 = 0 \text{)} .$$

$$c_2 = \theta = \text{مخروطات رأسها عند الأصل (مخروط إذا كان } c_2 = 0 \text{ أو المستوى } xy \text{ إذا كان } c_2 = \pi/2 \text{)} .$$

$$c_3 = \phi = \text{مستويات خلال محور } z$$

إحداثى المنحنيات تكون :

$$\text{تقاطع } c_1 = r \text{ و } c_2 = \theta \text{ (منحنى } \phi \text{) هى دائرة (أو نقطة) .}$$

$$\text{تقاطع } c_1 = r \text{ و } c_3 = \phi \text{ (منحنى } \theta \text{) هى نصف دائرة (أو } c_1 \neq 0 \text{)} .$$

$$\text{تقاطع } c_2 = \theta \text{ و } c_3 = \phi \text{ (منحنى } r \text{) هو خط مستقيم}$$

٢ - بين التحول من إهائيات اسطوانية إلى إهائيات عمودية

المعادلات الآتية تعرف التحول من إهائيات عمودية إلى إهائيات اسطوانية هى

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

$$\text{بتدريج (١) و (٢) والجانب } \rho^2 = x^2 + y^2 \text{ أو } \rho^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = x^2 + y^2$$

$$\text{حيث } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ و تكون } \phi \text{ موجبة .}$$

$$\text{بقسمة المعادلة (٢) على (١) } \tan \phi = \frac{\rho \sin \phi}{\rho \cos \phi} = \frac{y}{x} \text{ أو } \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\text{حيث يكون التحول المطلوب (١) } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ و } \phi = \arctan \frac{y}{x} \text{ (٢) } z = z$$

النقطة التى على محور z ($x=0, y=0$) لاحظ أن ϕ غير محددة . مثل هذه النقط تسمى نقاطاً فردية للتحول

٣ - أثبت أن نظام الإحداثيات الأسطوانية يكون متعامداً متجه الموضع .

لأي نقطة في الإحداثيات الأسطوانية هو

$$r = xi + yj + zk = \rho \cos \phi i + \rho \sin \phi j + z k$$

متجهات المماس للتمهينات ϕ , ρ , z على الترتيب هي $\frac{\partial r}{\partial \rho}$, $\frac{\partial r}{\partial \phi}$ و $\frac{\partial r}{\partial z}$ حيث

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \cos \phi i + \sin \phi j, \quad \frac{\partial r}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi i + \rho \cos \phi j, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = k$$

وحدة المتجهات في هذا الاتجاه هي

$$e_1 = e_\rho = \frac{\partial r / \partial \rho}{|\partial r / \partial \rho|} = \frac{\cos \phi i + \sin \phi j}{\sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} = \cos \phi i + \sin \phi j$$

$$e_2 = e_\phi = \frac{\partial r / \partial \phi}{|\partial r / \partial \phi|} = \frac{-\rho \sin \phi i + \rho \cos \phi j}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi}} = -\sin \phi i + \cos \phi j$$

$$e_3 = e_z = \frac{\partial r / \partial z}{|\partial r / \partial z|} = k$$

إذن

$$e_1 \cdot e_2 = (\cos \phi i + \sin \phi j) \cdot (-\sin \phi i + \cos \phi j) = 0$$

$$e_1 \cdot e_3 = (\cos \phi i + \sin \phi j) \cdot (k) = 0$$

$$e_2 \cdot e_3 = (-\sin \phi i + \cos \phi j) \cdot (k) = 0$$

وبالتالي e_1, e_2, e_3 تكون أمثلة متبادلة ونظام الإحداثيات يكون متعامداً .

٤ - مثل المتجه $kx + yj + z i$ في الإحداثيات الأسطوانية ثم أوجد A_ρ, A_ϕ, A_z و

من مسألة (٣)

$$e_\rho = \cos \phi i + \sin \phi j \quad (1) \quad e_\phi = -\sin \phi i + \cos \phi j \quad (2) \quad e_z = k$$

بجمل (١) و (٢) على التوال

$$i = \cos \phi e_\rho - \sin \phi e_\phi, \quad j = \sin \phi e_\rho + \cos \phi e_\phi$$

$$A = xi + yj + zk \quad \text{إذن}$$

$$= x(\cos \phi e_\rho - \sin \phi e_\phi) - y(2\rho \cos \phi (\sin \phi e_\rho + \cos \phi e_\phi) + \rho \sin \phi e_z$$

$$= (x \cos \phi - 2\rho \cos \phi \sin \phi) e_\rho - (x \sin \phi + 2\rho \cos^2 \phi) e_\phi + \rho \sin \phi e_z$$

$$A_\rho = x \cos \phi - 2\rho \cos \phi \sin \phi, \quad A_\phi = -x \sin \phi - 2\rho \cos^2 \phi, \quad A_z = \rho \sin \phi$$

٥ - أثبت $\frac{d}{dt} e_\rho = \dot{\phi} e_\phi, \quad \frac{d}{dt} e_\phi = -\dot{\phi} e_\rho$ حيث $\dot{\phi}$ تيرن التردد بالنسبة لزمان t .

من مسألة (٣)

$$e_\rho = \cos \phi \, i + \sin \phi \, j \quad e_\phi = -\sin \phi \, i + \cos \phi \, j$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e_\rho &= -(\sin \phi) \dot{\phi} \, i + (\cos \phi) \dot{\phi} \, j = (-\sin \phi \, i + \cos \phi \, j) \dot{\phi} = \dot{\phi} \, e_\phi \quad \text{إذن} \\ \frac{d}{dt} e_\phi &= -(\cos \phi) \dot{\phi} \, i - (\sin \phi) \dot{\phi} \, j = -(\cos \phi \, i + \sin \phi \, j) \dot{\phi} = -\dot{\phi} \, e_\rho \end{aligned}$$

٩ - عبر عن السرعة v والمجلة a بجمع في الإحداثيات الاسطوانية:في الإحداثيات الاسطوانية ، معطى الموضع يكون $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ومتجهات السرعة والمجلة تكون .

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

في الإحداثيات الاسطوانية ، استخدم مسألة (٤)

$$\begin{aligned} r &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (\rho \cos \phi)(\cos \phi \, e_\rho - \sin \phi \, e_\phi) \\ &\quad + (\rho \sin \phi)(\sin \phi \, e_\rho + \cos \phi \, e_\phi) + z \, e_z \\ &= \rho \, e_\rho + z \, e_z \end{aligned}$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d\rho}{dt} e_\rho + \rho \frac{de_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} e_z = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\phi} e_\phi + \dot{z} e_z \quad \text{إذن}$$

باستخدام مسألة (٥) . فاضل مرة أخرى

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\phi} e_\phi + \dot{z} e_z) \\ &= \dot{\rho} \frac{de_\rho}{dt} + \ddot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\phi} \frac{de_\phi}{dt} + \rho \ddot{\phi} e_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} e_\phi + \dot{z} e_z \\ &= \dot{\rho} \dot{\phi} e_\phi + \ddot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\phi} (-\dot{\phi} e_\rho) + \rho \ddot{\phi} e_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} e_\phi + \dot{z} e_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) e_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) e_\phi + \ddot{z} e_z \end{aligned}$$

استخدم مسألة (٥)

٧ - أوجد مربع المتجه لطول المنحنى في الإحداثيات الاسطوانية ثم أوجد معاملات القياس المناظرة

الطريقة الأولى :

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

$$dx = -\rho \sin \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho, \quad dy = \rho \cos \phi \, d\phi + \sin \phi \, d\rho, \quad dz = dz$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = (-\rho \sin \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho)^2 + (\rho \cos \phi \, d\phi + \sin \phi \, d\rho)^2 + (dz)^2 \quad \text{إذن} \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 = h_1^2 (d\rho)^2 + h_2^2 (d\phi)^2 + h_3^2 (dz)^2 \end{aligned}$$

$$h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\phi = \rho, \quad h_3 = h_z = 1. \quad \text{و}$$

الطريقة التقليدية : متجه الموضع يكون $r = \rho' \cos \phi \mathbf{i} + \rho' \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ إذن

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial r}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial r}{\partial z} dz \\ &= (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) d\rho + (-\rho \sin \phi \mathbf{i} + \rho \cos \phi \mathbf{j}) d\phi + \mathbf{k} dz \\ &= (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \mathbf{i} + (\sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi) \mathbf{j} + \mathbf{k} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr \cdot dr = (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi)^2 + (\sin \phi d\rho + \rho \cos \phi d\phi)^2 + (dz)^2 \quad \text{إذ أن} \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 \end{aligned}$$

A - حل مسألة (v) لكل من (أ) الإحداثيات الكروية (ب) الإحداثيات الاسطوانية لنضع مكانه،

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} dx &= -r \sin \theta \sin \phi d\phi + r \cos \theta \cos \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi dr \\ dy &= r \sin \theta \cos \phi d\phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \sin \phi dr \\ dz &= -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr \end{aligned} \quad \text{إذن}$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

$$h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\phi = r \sin \theta, \quad \text{معاملات القياس هي}$$

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z \quad (ب)$$

$$dx = u du - v dv, \quad dy = u dv + v du, \quad dz = dz \quad \text{إذن}$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (u^2 + v^2)(du)^2 + (u^2 + v^2)(dv)^2 + (dz)^2$$

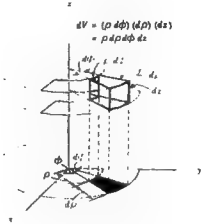
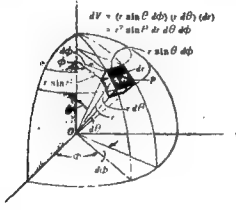
$$h_1 = h_u = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_2 = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_3 = h_z = 1, \quad \text{معاملات القياس هي}$$

٩ - إرسم عنصر الحجم في (أ) الإحداثيات الاسطوانية (ب) الإحداثيات الكروية وأصل مقادير أحده .

(أ) أحرف عنصر الحجم في الإحداثيات الاسطوانية (شكل v-٩) له المقادير $\rho d\phi, d\rho$ وهذه يمكن رؤاها من حقيقة أن الأحرف تعطي للمعادلات

$$dx_1 = h_1 du_1 = (1)(d\rho) = d\rho, \quad dx_2 = h_2 du_2 = \rho d\phi, \quad dx_3 = (1)(dz) = dz$$

يستخدم المعامل الذي حصلنا عليه في المسألة (v) .



شكل (أ) حجم العنصر في الإحداثيات الاسطوانية

شكل (ب) حجم العنصر في الإحداثيات الكروية

شكل ٧-٩

(ب) أحرف عنصر الحجم في الإحداثيات الكروية (شكل ٧-٩) (ب) له المقادير $dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$ يمكن رؤية ذلك من حقيقة أن الأحرف تقطع بالمعادلات

$$dx_1 = h_1 du_1 = (1)(dr) = dr, \quad dx_2 = h_2 du_2 = r d\theta, \quad dx_3 = h_3 du_3 = r \sin \theta d\phi$$

باستخدام سمات القياس التي حصلنا عليها في المسألة (أ) (١)

١-٩. أوجد حجم العنصر dV في (أ) الإحداثيات الاسطوانية (ب) الإحداثيات الكروية (ج) الإحداثيات الاسطوانية لقطع مكافئ.

حجم العنصر في إحداثيات منحنى الأضلاع المتصادم u_1, u_2, u_3 هو

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

(أ) في الإحداثيات الاسطوانية $u_1 = \rho, u_2 = \phi, u_3 = z, h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$ (أنظر مسألة ٧) إذن

$$dV = (1)(\rho)(1) d\rho d\phi dz = \rho d\rho d\phi dz$$

هذه يمكن ملاحظتها مباشرة من شكل ٧-٩ (أ) المسألة (٩)

(ب) في الإحداثيات الكروية $u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \phi, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$ (أنظر مسألة ٨-١) إذن

$$dV = (1)(r)(r \sin \theta) dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

هذه يمكن ملاحظتها مباشرة من (شكل ٧-٩) (ب) لمسألة (٩)

(ج) في الإحداثيات الاسطوانية لقطع مكافئ $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = z, h_1 = 1/\sqrt{u^2 + v^2}, h_2 = 1/\sqrt{u^2 + v^2}, h_3 = 1$ (أنظر مسألة ٨ (ب) (أ) إذن

$$dV = (1/\sqrt{u^2 + v^2})(1/\sqrt{u^2 + v^2})(1) du dv dz = (u^2 + v^2) du dv dz$$

١١- أوجد (أ) معاملات القياس و (ب) حجم المتغير dV في الإحداثيات الكروية المقلبة.

$$x = a \cosh \xi \cos \eta \cos \phi, \quad y = a \cosh \xi \cos \eta \sin \phi, \quad z = a \sinh \xi \sin \eta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} dx &= -a \cosh \xi \cos \eta \sin \phi \, d\phi - a \cosh \xi \sin \eta \cos \phi \, d\eta + a \sinh \xi \cos \eta \cos \phi \, d\xi \\ dy &= a \cosh \xi \cos \eta \cos \phi \, d\phi - a \cosh \xi \sin \eta \sin \phi \, d\eta + a \sinh \xi \cos \eta \sin \phi \, d\xi \\ dz &= a \sinh \xi \cos \eta \, d\eta + a \cosh \xi \sin \eta \, d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Then } (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = a^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) (d\xi)^2 \\ &\quad + a^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) (d\eta)^2 \\ &\quad + a^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta \, (d\phi)^2 \end{aligned}$$

$$h_1 = h_\xi = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_2 = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_3 = h_\phi = a \cosh \xi \cos \eta.$$

$$\begin{aligned} dV &= (a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}) (a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}) (a \cosh \xi \cos \eta) \, d\xi \, d\eta \, d\phi \quad (ب) \\ &= a^3 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) \cosh \xi \cos \eta \, d\xi \, d\eta \, d\phi \end{aligned}$$

١٢- أوجد تغيرات المتغير المساحة في إحداثيات منحني الأشعاع المتكامل.

بالرجوع إلى (شكل ٧-٣) صفة ١٧٨ ، تسمى عناصر المساحة بالمطابقة

$$\begin{aligned} dA_1 &= |(h_2 \, du_2 \, dv_2) \times (h_3 \, du_3 \, dv_3)| = h_2 h_3 |e_2 \times e_3| \, du_2 \, dv_2 = h_2 h_3 \, du_2 \, dv_2 \\ &\quad \text{حيث } |e_2 \times e_3| = |e_1| = 1. \text{ بالمثل} \\ dA_2 &= |(h_1 \, du_1 \, dv_1) \times (h_3 \, du_3 \, dv_3)| = h_1 h_3 \, du_1 \, dv_3 \\ dA_3 &= |(h_1 \, du_1 \, dv_1) \times (h_2 \, du_2 \, dv_2)| = h_1 h_2 \, du_1 \, dv_2 \end{aligned}$$

١٣- إذا كان u_1, u_2, u_3 إحداثيات منحني الأشعاع المتكامل ، بين أن جاكوبيان لكل من x, y, z بالنسبة إلى u_1, u_2, u_3 يكون

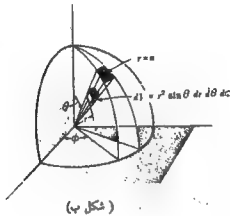
$$J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = h_1 h_2 h_3$$

من مسألة (٣٨) الفصل (٢) . المحدد المطبق يساوي

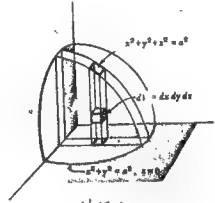
$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial u_1} i + \frac{\partial y}{\partial u_1} j + \frac{\partial z}{\partial u_1} k\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u_2} i + \frac{\partial y}{\partial u_2} j + \frac{\partial z}{\partial u_2} k\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial u_3} i + \frac{\partial y}{\partial u_3} j + \frac{\partial z}{\partial u_3} k\right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} \times \frac{\partial x}{\partial u_3} = h_1 e_1 \cdot h_2 e_2 \times h_3 e_3 \\ &= h_1 h_2 h_3 e_1 \cdot e_2 \times e_3 = h_1 h_2 h_3 \end{aligned}$$

إذا كان الجاكويان يساوى صفراً إذن $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_3}$ تكون متجهات واقعة في نفس المستوى ويكون تحول إحداثي منحنى الإضلاع بحيث تكون العلاقة بين x, y, z لها الصيغة $F(x, y, z) = 0$. حينئذ تتطلب أن تكون قيمة الجاكويان مختلفة عن الصفر .

١٤- احسب $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$ حيث V هي الكرة التي مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها a .



(شكل ب)



(شكل أ)

(شكل ١٠-٧)

التكامل المطلوب يساوى ثمانية أمثال التكامل المحسوب على جزء الكرة الموجود في النصف الأول أنظر شكل (١٠-٧) (أ) .

إذن في إحداثيات عمودية يكون التكامل يساوى

$$8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

ولكن الحساب ولو أنه ممكن إلا أنه شاق . من الأسهل استخدام الإحداثيات الكروية الحساب . فلتغير إلى إحداثيات كروية ، التكاملية (المطلوب تكاملها) $x^2 + y^2 + z^2$ تبديل بالنسبة التي تكاثرها r^2 بينما عنصر الحجم $dx dy dz$ تبديل بعنصر الحجم $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ (أنظر مسألة ١٠) (ب) لتغطية المنطقة المطلوبة في النصف الأول ، نبت كل من ϕ و θ أنظر شكل ١٠ (ب) وكامل من $r = 0$ إلى $r = a$ ثم احتفظ بقيمة ϕ ثابتة وكامل من $\theta = 0$ إلى $\pi/2$ ، أميراً كامل بالنسبة إلى ϕ من 0 إلى $\phi = \pi/2$. هنا نكون قد أدبنا التكامل في الترتيب ϕ, θ, r مع العلم أن أي ترتيب يمكن استخدامه . وتكون النتيجة :

$$\begin{aligned} 8 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^a (r^2) (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) &= 8 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^a r^4 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= 8 \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\frac{r^5}{5} \sin \theta \right]_{r=0}^a d\theta d\phi = \frac{8a^5}{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{8a^5}{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\pi/2} d\phi = \frac{8a^5}{5} \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi = \frac{4\pi a^5}{5} \end{aligned}$$

فيزيائياً التكامل يمثل مزم القصور الذاتي للكرة بالنسبة إلى نقطة الأصل أي مزم القصور الذاتي ، إذا كانت الكرة لها وحدة الكثافة .

عوضاً ، عند تحول تكامل متعدد من الاحتمالات الموزعة إلى منحنى التضلع المتصادمة فإن عنصر الحجم $dx dy dz$ يبدل بالمقدار $du_1 du_2 du_3$ أو ما يكافئها $J(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}) du_1 du_2 du_3$ حيث J هي الجاكوبيان لتحول من x, y, z إلى u_1, u_2, u_3 (أنظر مسألة ١٣)

١٥- إذا كان u_1, u_2, u_3 هي إحداثيات عامة ، بين أن $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_3}$ تكون نظماً اتجاهية متعامدة .

لأن أن نبين أن $\frac{\partial r}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial r}{\partial u_q} = \begin{cases} 1 & \text{if } p = q \\ 0 & \text{if } p \neq q \end{cases}$ حيث p, q لها إحدى القيم 1, 2, 3 .

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial r}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial r}{\partial u_3} du_3$$

بالضرب في ∇u_1 . إذن

$$\nabla u_1 \cdot dr = du_1 = (\nabla u_1 \cdot \frac{\partial r}{\partial u_1}) du_1 + (\nabla u_1 \cdot \frac{\partial r}{\partial u_2}) du_2 + (\nabla u_1 \cdot \frac{\partial r}{\partial u_3}) du_3$$

$$\nabla u_1 \cdot \frac{\partial r}{\partial u_1} = 1, \quad \nabla u_1 \cdot \frac{\partial r}{\partial u_2} = 0, \quad \nabla u_1 \cdot \frac{\partial r}{\partial u_3} = 0 \quad \text{لـ}$$

بالمثل ، بالضرب في ∇u_2 و ∇u_3 . يمكن إثبات العلاقات المتبقية

$$\left\{ \frac{\partial r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial u_2} \times \frac{\partial r}{\partial u_3} \right\} \cdot \left\{ \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 \right\} = 1. \quad \text{١٦- أثبت}$$

من مسألة ١٥ $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_3}$ و $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$ تكون نظماً اتجاهية متعامدة . إذن النتيجة المطلوبة نحصل عليها من المسألة ٢ (٢) في الفصل ٢

تكون النتيجة معادلة لنظرية على الجاكوبيان الكمية .

$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = J(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z})$$

$$\text{وبالتالي } J(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}) J(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}) = 1 \quad \text{باستخدام مسألة ١٣ .}$$

١٧- بين أن مربع عنصر طول قيرس في احتمالات منحنى التضلع العامة يمكن التعبير عنها بواسطة المعادلة .

$$ds^2 = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 g_{pq} du_p du_q$$

لدينا

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial r}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial r}{\partial u_3} du_3 = \mathcal{E}_1 du_1 + \mathcal{E}_2 du_2 + \mathcal{E}_3 du_3$$

$$dr^2 = dr \cdot dr = \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_1 du_1^2 + \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_2 du_2^2 + \mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{E}_3 du_3^2 + \mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_1 du_2 du_1 + \mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{E}_1 du_3 du_1 + \mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{E}_2 du_3 du_2 + \mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2 du_1 du_2$$

$$= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 g_{pq} du_p du_q \quad \text{where} \quad g_{pq} = \mathcal{E}_p \cdot \mathcal{E}_q$$

تسمى هذه الصيغة التربيعية الأساسية أو صيغة مترية . الكميات g_{pq} تسمى معاملات مترية وتكون متماثلة أي أن $g_{pq} = g_{qp}$ إذا كان $0 = g_{pq}$ وكذلك g_{pp} إذن نظام الإحداثيات يكون متعامداً . في هذه الحالة $g_{11} = h_1^2, g_{22} = h_2^2, g_{33} = h_3^2$. الصيغة المترية يمكن أن تمتد إلى أبعاد فراغية أكبر تكون من المباحث المهمة في النظرية النسبية (أنظر فصل ٨) .

الانحدار ، القواعد والاختلاف في الاحداثيات المتعامدة :

١٨ - اشتق تعبير الكمية $\nabla \Phi$ ، في إحداثيات منحنى الانحناء المتعامدة .

ليكن $\nabla \Phi = f_1 \mathcal{E}_1 + f_2 \mathcal{E}_2 + f_3 \mathcal{E}_3$ حيث f_1, f_2, f_3 مطلوب إيجادها .

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} du_3 \\ &= h_1 \mathcal{E}_1 du_1 + h_2 \mathcal{E}_2 du_2 + h_3 \mathcal{E}_3 du_3 \end{aligned} \quad \text{حيث}$$

لدينا

$$d\Phi = \nabla \Phi \cdot dr = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3 \quad (1)$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} du_3 \quad (2)$$

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \quad f_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \quad f_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \quad (1) \text{ و } (2)$$

$$\nabla \Phi = \frac{\mathcal{E}_1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \quad \text{إذن}$$

يرى هنا أن العامل ∇ يمكنه

$$\nabla = \frac{\mathcal{E}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathcal{E}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}$$

يؤدى هنا إلى التعبير للمتجه للعامل ∇ في الإحداثيات المتعامدة

١٩ - ليكن u_1, u_2, u_3 إحداثيات متعامدة

$$(أ) \text{ أثبت أن } |\nabla g_p| = h_p^{-1}, \quad p = 1, 2, 3$$

$$(ب) \text{ بين أن } \mathcal{E}_p = h_p \nabla g_p$$

(أ) ليكن $u = 0$ في معادلة (١٨). إذن $\nabla u_1 = e_1/h_1$ ، كذلك $e_1/h_1 = h_1^{-1}$ حيث $|u_1| = 1$

بالمثل ليكن $u = 0$ في معادلة (١٩). إذن $\nabla u_2 = e_2/h_2$ ، كذلك $e_2/h_2 = h_2^{-1}$ حيث $|u_2| = 1$

(ب) بالتصريف $\frac{\partial u_p}{\partial x_p}$ من جزء (أ) يمكننا أن نكتب في السرعة $e_p = h_p \nabla u_p$ ، وتكون النتيجة قد أثبتت

٢٠ - أثبت $\nabla u_1 \times \nabla u_2 = \nabla u_3$ ، بمعادلات عائلة لكل من e_1 و e_2 و e_3 حيث u_1, u_2, u_3 إحداثيات متعامدة هو

$$\nabla u_1 = \frac{e_1}{h_1}, \nabla u_2 = \frac{e_2}{h_2}, \nabla u_3 = \frac{e_3}{h_3} \quad \text{من مسألة ١٩}$$

$$\nabla u_1 \times \nabla u_2 = \frac{e_1 \times e_2}{h_1 h_2} = \frac{e_3}{h_3 h_2} \quad \text{و} \quad e_3 = h_2 h_3 \nabla u_1 \times \nabla u_2.$$

$$\text{بالمثل} \quad e_2 = h_3 h_1 \nabla u_2 \times \nabla u_1 \quad \text{و} \quad e_1 = h_1 h_2 \nabla u_2 \times \nabla u_1.$$

٢١ - بين أن في الإحداثيات المتعامدة يكون

$$\nabla \cdot (A_1 e_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 h_2 h_3) \quad (أ)$$

$$\nabla \times (A_1 e_1) = \frac{e_2}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial x_3} (A_1 h_1) - \frac{e_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 h_1) \quad (ب)$$

بالتكامل عائلة لمعادلات $A_1 e_1$ و $A_2 e_2$ و $A_3 e_3$

$$\nabla \cdot (A_1 e_1) = \nabla \cdot (A_1 h_2 h_3 \nabla u_1 \times \nabla u_2) \quad \text{من مسألة ٢٠}$$

$$= \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \nabla u_1 \times \nabla u_2 + A_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla u_1 \times \nabla u_2)$$

$$= \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{e_1}{h_1} \times \frac{e_2}{h_2} + 0 = \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \frac{e_3}{h_2 h_3}$$

$$= \left[\frac{e_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 h_2 h_3) + \frac{e_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} (A_1 h_2 h_3) \right] \cdot \frac{e_3}{h_2 h_3}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 h_2 h_3)$$

$$\nabla \times (A_1 e_1) = \nabla \times (A_1 h_1 \nabla u_3) \quad (ب)$$

$$= \nabla (A_1 h_1) \times \nabla u_3 + A_1 h_1 \nabla \times \nabla u_3$$

$$= \nabla (A_1 h_1) \times \frac{e_3}{h_3} + 0$$

$$= \left[\frac{e_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 h_1) + \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 h_1) + \frac{e_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} (A_1 h_1) \right] \times \frac{e_3}{h_3}$$

$$= \frac{e_2}{h_1 h_1} \frac{\partial}{\partial x_3} (A_1 h_1) - \frac{e_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 h_1)$$

٢٢ - جبر عن $\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ في الإحداثيات السطوانية .

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) = \nabla \cdot (A_1 \mathbf{e}_1) + \nabla \cdot (A_2 \mathbf{e}_2) + \nabla \cdot (A_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 h_2) \right]\end{aligned}$$

باستخدام مسألة ٢١ (أ)

٢٢ - جبر عن $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$ في الإحداثيات السطوانية

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) = \nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) + \nabla \times (A_2 \mathbf{e}_2) + \nabla \times (A_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \frac{e_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{e_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) \\ &\quad + \frac{e_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{e_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \\ &\quad + \frac{e_1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{e_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_3) \\ &= \frac{e_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_2) \right] + \frac{e_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_3) \right] \\ &\quad + \frac{e_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_1) \right]\end{aligned}$$

باستخدام مسألة ٢١ (ب) ، يمكن أن يكتب هذا

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix}$$

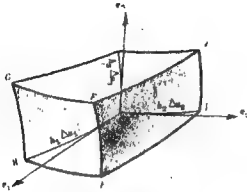
٢٤ - جبر عن $\nabla^2 \psi$ في إحداثيات متجهي الاتصال من

$$\nabla^2 \psi = \frac{e_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} + \frac{e_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \quad \text{مسألة ١٨}$$

إذا كان $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، إذن $A_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1}$ ، $A_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$ ، $A_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3}$ من المسألة ٢٢

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right]\end{aligned}$$

٢٥ - استخدم تعريف التكامل



شكل ١١ - ٧

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS}{\Delta V}$$

(أنظر مسألة ١٩ فصل ٦) . التعبير عن $\nabla \cdot \mathbf{A}$ في إحداثيات منطقي الأضلاع المتعامدة .

اعتبر عنصر الحجم ΔV (أنظر الشكل ١١ - ٧) له الأضلاع $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$.

ليكن $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ وليكن \mathbf{n} وحدة المتجه إلى الخارج السطح ΔS الحجم ΔV . على الوجه $JKLP$ و $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$. إذن يكون لدينا تقريباً

$$\begin{aligned} \iint_{JKLP} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \text{ at point } P) (\text{Area of } JKLP) \\ &= [(A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \cdot (-\mathbf{e}_1)] (\Delta u_2 \Delta u_3) \\ &= -A_1 \Delta u_2 \Delta u_3 \end{aligned}$$

على وجه $EFGH$ يكون التكامل السطحي

$$A_1 \Delta u_2 \Delta u_3 + \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 \Delta u_2 \Delta u_3) \Delta u_1$$

بفرض النظر عن الأجزاء متناهية الصغر ذات رتبة أعلى من $\Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$. إذن الإسهام الصافي للتكامل السطحي للذين السطحيين يكون

$$\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 \Delta u_2 \Delta u_3) \Delta u_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 \Delta u_2 \Delta u_3)$$

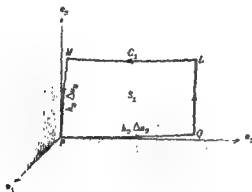
الإسهام لكل البقية وجوه الحجم ΔV يكون

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 \Delta u_2 \Delta u_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 \Delta u_1 \Delta u_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 \Delta u_1 \Delta u_2) \right] \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

بقسمة هذه المعادلة على الحجم $\Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$ والنهايات وأخذ النهايات عندما من الصغر نجد .

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 \Delta u_2 \Delta u_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 \Delta u_1 \Delta u_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 \Delta u_1 \Delta u_2) \right]$$

لاحظ أن نفس النتيجة يمكن الحصول عليها باختيار عنصر الحجم ΔV حيث أن P تكون في المركز . في هذه الحالة تكون الحسابات مماثلة لمسألة ٢١ فصل ٤



شكل ٧ - ١١

٧٦ - استخدام تعريف التكامل

$$(\text{curl } A) \cdot n = (\nabla \times A) \cdot n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C A \cdot dx}{\Delta S}$$

(أنظر مسألة ٣٥ فصل ٦) بتعبير عن $\nabla \times A$ في إحداثيات منحنى الانسلاخ المتعامدة.

احسب أولاً $e_1 \cdot (\text{curl } A)$ لسل هذا اعتبر السطح S الموضعي على e_1 عند P ، كما في شكل ٧ - ١٢ طرف حدود S_1 به C_1 .
ليكن $A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$ لدينا

$$\oint_{C_1} A \cdot dx = \int_{PQ} A \cdot dx + \int_{QL} A \cdot dx + \int_{LM} A \cdot dx + \int_{MP} A \cdot dx$$

التقريبات الآتية صحيحة

$$\begin{aligned} \int_{PQ} A \cdot dx &= (A \text{ at } P) \cdot (h_2 \Delta x_2 e_2) \\ (1) \quad &= (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3) \cdot (h_2 \Delta x_2 e_2) = A_2 h_2 \Delta x_2 \end{aligned}$$

$$\int_{ML} A \cdot dx = A_3 h_2 \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_2 h_2 \Delta x_2) \Delta x_2 \quad \text{لأن}$$

أو

$$(2) \quad \int_{LM} A \cdot dx = -A_3 h_2 \Delta x_2 - \frac{\partial}{\partial x_3} (A_2 h_2 \Delta x_2) \Delta x_2$$

بالمثل

$$\int_{PM} A \cdot dx = (A \text{ at } P) \cdot (h_2 \Delta x_2 e_2) = A_2 h_2 \Delta x_2$$

أو

$$(3) \quad \int_{NP} A \cdot dx = -A_3 h_2 \Delta x_2$$

و

$$(4) \quad \int_{QL} A \cdot dx = A_3 h_2 \Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_2 h_2 \Delta x_2) \Delta x_2$$

أجمع (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نأخذ

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} A \cdot dx &= \frac{\partial}{\partial x_2} (A_3 h_2 \Delta x_2) \Delta x_2 - \frac{\partial}{\partial x_3} (A_2 h_2 \Delta x_2) \Delta x_2 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (A_3 h_2) - \frac{\partial}{\partial x_3} (A_2 h_2) \right] \Delta x_2 \Delta x_3 \end{aligned}$$

بنفس النظر من الأجزاء متناهية الصغر لرتبة أعلى من Δx_2 و Δx_3 .

بالنسبة على المساحة S_1 التي تتأوى $\Delta M_1 \Delta M_2 \Delta M_3$ و h_3 و h_2 و h_1 تأخذ البيانات عتسا ΔM_2 و ΔM_1 تقرب من الصفر

$$(\text{curl } A) \cdot e_3 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_3) \right]$$

بالمثل ، باعتبار المساحات S_2 و S_3 عمودية على e_2 و e_3 على الترتيب عند P نجد $(\text{curl } A) \cdot e_2$ و $(\text{curl } A) \cdot e_1$ يؤدي هذا إلى النتيجة المطلوبة

$$\begin{aligned} \text{curl } A &= \frac{e_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_2 h_3) \right] \\ &+ \frac{e_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (A_3 h_1) \right] \\ &+ \frac{e_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_2) \right] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

أيضاً يمكن الحصول على النتيجة باختيار P كركيز المساحة S_1 يمكن تكللة الحساب كما في مسألة ٣٦ فصل ٦ .

$$27 - \text{مير من الكمية الآتية في الإحداثيات الأسطوانية} \quad \nabla \cdot A(\rho) \quad \nabla \times A(\rho) \quad \nabla^2 \Phi(\rho, z)$$

في الإحداثيات الأسطوانية (ρ, ϕ, z) .

$$\begin{aligned} e_1 = \rho, \quad e_2 = \phi, \quad e_3 = z; \quad e_1 = e_\rho, \quad e_2 = e_\phi, \quad e_3 = e_z; \\ h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\phi = \rho, \quad h_3 = h_z = 1 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} e_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} e_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} e_3 \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} e_\phi + \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial z} e_z \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} e_z \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \\ &= \frac{1}{(1)(\rho)(1)} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho(1)A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi} ((1)(1)A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} ((1)(\rho)A_z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_z) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$A = A_\rho e_1 + A_\phi e_2 + A_z e_3, \text{ i.e. } A_1 = A_\rho, \quad A_2 = A_\phi, \quad A_3 = A_z. \quad \text{حيث}$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} e_\rho & \rho e_\phi & e_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_\phi) \right) e_\rho + \left(\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) e_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) e_z \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(1)(\rho)(1)} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{(\rho)(1)}{(1)} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{(1)(1)}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(1)(\rho)}{(1)} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

من (١) $\nabla \times A$ و $\Delta^2 \Phi$ في المعادلات (٢) و (٣)

حيث $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$; $e_1 = e_r$, $e_2 = e_\theta$, $e_3 = e_\phi$; $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\theta = r$, $h_3 = h_\phi = r \sin \theta$

$$\nabla \times A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1)(r)(r \sin \theta)} \begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & r \sin \theta e_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r A_\theta) \right\} e_r + \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\phi) \right\} r e_\theta + \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} r \sin \theta e_\phi \right]$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (2)$$

$$= \frac{1}{(1)(r)(r \sin \theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(r)(r \sin \theta)}{(1)} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{(r \sin \theta)(1)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{(1)(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$$

٢٩ - أكتب معادلة لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية لقطع مكافئ.

من المسألة ٨ (ب) .

$$u_1 = u, u_2 = v, u_3 = z; \quad h_1 = \sqrt{u^2 + v^2}, h_2 = \sqrt{u^2 + v^2}, h_3 = 1$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((u^2 + v^2) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \quad \text{إذن} \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

وتكون معادلة لابلاس $\nabla^2 \psi = 0$ أو

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + (u^2 + v^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

٣٠ - مر عن معادلة توصيل الحرارة $\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \nabla^2 U$ في الإحداثيات الأسطوانية لقطع ناقص

$$\text{حيث } u_1 = u, u_2 = v, u_3 = z; \quad h_1 = h_2 = a \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, h_3 = 1 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \frac{1}{a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v) \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{aligned}$$

وتكون معادلة توصيل الحرارة هي

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left\{ \frac{1}{a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\}$$

احداثيات منحنى الانحناء السطحية :

٣١ - بين أن مربع عنصر طول القوس على السطح $r = r(u, v)$ يمكن أن تكتب في الصيغة

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u} du + \frac{\partial r}{\partial v} dv \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr \cdot dr \\ &= \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} du^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} du dv + \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} dv^2 \quad \text{إذن} \\ &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \end{aligned}$$

٣٢ - بين أن عنصر مساحة السطح $r = r(u, v)$ تعطى بالمعادلة

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

تعطى معادلة العنصر بالمعادلة

$$dS = \left| \left(\frac{\partial r}{\partial u} du \right) \times \left(\frac{\partial r}{\partial v} dv \right) \right| = \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| du dv = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right)} du dv$$

التي تحت علامة الجزر تكون مساوية لـ (أنظر مسألة ٤٨ ، فصل ٢)

$$\text{بالتالي يمكن الحصول على النتيجة} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u} , \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} , \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} , \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} , \frac{\partial x}{\partial v} \right) = EG - F^2$$

مسائل متنوعة على الإحداثيات المتجهة :

٣٣ - ليكن A متجهاً معرفاً بالنسبة إلى نظامين هامين من إحداثيات منحني الأضلاع (u_1, u_2, u_3) و $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$. أوجد العلاقة بين المركبات المتبادلة للاختلاف الناتجة في نظامي الإحداثيات.

نفرس أن معادلات التحول من النظام المتعامد (x, y, z) إلى كل من (u_1, u_2, u_3) و $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ أعطيت بالنظم برأسية :

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_1(u_1, u_2, u_3), & y = y_1(u_1, u_2, u_3), & z = z_1(u_1, u_2, u_3) \\ x = x_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), & y = y_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), & z = z_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \end{cases}$$

إذن يوجد تحول مباشر من نظام (u_1, u_2, u_3) إلى نظام $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ معرفة برأسية

$$(2) \quad u_1 = u_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad u_2 = u_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad u_3 = u_3(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$$

ومكسباً من (١)

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} du_3 = \bar{e}_1 du_1 + \bar{e}_2 du_2 + \bar{e}_3 du_3 \\ dx &= \frac{\partial x}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial x}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial x}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3 = \bar{e}_1 d\bar{u}_1 + \bar{e}_2 d\bar{u}_2 + \bar{e}_3 d\bar{u}_3 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \bar{e}_1 du_1 + \bar{e}_2 du_2 + \bar{e}_3 du_3 = \bar{e}_1 d\bar{u}_1 + \bar{e}_2 d\bar{u}_2 + \bar{e}_3 d\bar{u}_3$$

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3 \quad (4) \text{ من}$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3$$

$$du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} d\bar{u}_1 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} d\bar{u}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} d\bar{u}_3$$

بالتعويض في (٣) ومساواة المعادلات du_1, du_2, du_3 في كلا الجانبين ، نجد

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} + \bar{e}_2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} + \bar{e}_3 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} \\ \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} + \bar{e}_2 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} + \bar{e}_3 \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} \\ \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} + \bar{e}_2 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} + \bar{e}_3 \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \end{cases}$$

الآن A يمكن التعبير عنها في نظام الإحداثيات كالاتي

$$(٥) \quad A = C_1 \bar{e}_1 + C_2 \bar{e}_2 + C_3 \bar{e}_3 \quad , \quad A = \bar{C}_1 \bar{e}_1 + \bar{C}_2 \bar{e}_2 + \bar{C}_3 \bar{e}_3$$

حيث C_1, C_2, C_3 و $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ هي الصور المضادة للاختلاف لمركبات A في نظام الإحداثيات. بالتعويض من (٤) في (٥)

$$C_1 \bar{e}_1 + C_2 \bar{e}_2 + C_3 \bar{e}_3 = \bar{C}_1 \bar{e}_1 + \bar{C}_2 \bar{e}_2 + \bar{C}_3 \bar{e}_3$$

$$= (\bar{C}_1 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial e_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial e_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial e_3}) e_1 + (\bar{C}_1 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial e_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial e_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial e_3}) e_2 + (\bar{C}_1 \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial e_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial e_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial e_3}) e_3$$

$$(٦) \quad \begin{cases} C_1 = \bar{C}_1 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial e_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial e_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial e_3} \\ C_2 = \bar{C}_1 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial e_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial e_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial e_3} \\ C_3 = \bar{C}_1 \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial e_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial e_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial e_3} \end{cases} \quad \text{إذن}$$

أو بالرموز القصيرة

$$(٧) \quad C_p = \bar{C}_1 \frac{\partial \bar{e}_p}{\partial e_1} + \bar{C}_2 \frac{\partial \bar{e}_p}{\partial e_2} + \bar{C}_3 \frac{\partial \bar{e}_p}{\partial e_3} \quad p = 1, 2, 3$$

وبالرموز الزوجية الأصغر

$$(٨) \quad C_p = \sum_{q=1}^3 \bar{C}_q \frac{\partial \bar{e}_p}{\partial e_q} \quad p = 1, 2, 3$$

بالمثل ، بتغيير الإحداثيات نجد أن

$$(٩) \quad \bar{C}_p = \sum_{q=1}^3 C_q \frac{\partial e_p}{\partial \bar{e}_q} \quad p = 1, 2, 3$$

النتائج السابقة نفودنا لتعريف التحويل. إذا كانت ثلاث كيات C_1, C_2, C_3 لنظام الإحداثيات (u_1, u_2, u_3) لها علاقة بثلاث كيات أخرى $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ لنظام إحداثيات أخرى $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ باستخدام معادلات التحويل (٦) ، (٧) ، (٨) أو (٩). إذن تسمى هذه الكيات الصور المضادة للاختلاف لمركبات المتجه أو الصور مضادة الاختلاف للكيات الممتدة للصف الأول.

٣٤- أمثلة حل مسألة ٣٣ لمركبات المتجه A المتصلة للاختلاف.

أكتب المركبات المتصلة للاختلاف المتجه A في النظام (u_1, u_2, u_3) و $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ مثل e_1, e_2, e_3 و $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ على الترتيب. إذن

$$(١) \quad A = c_1 \nabla u_1 + c_2 \nabla u_2 + c_3 \nabla u_3 = \bar{c}_1 \nabla \bar{u}_1 + \bar{c}_2 \nabla \bar{u}_2 + \bar{c}_3 \nabla \bar{u}_3$$

$$\vec{u}_p = \vec{u}_p(u_1, u_2, u_3) \text{ with } p = 1, 2, 3$$

حيث الآن

$$(r) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial x} = \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial y} = \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial z} = \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{cases} \quad p = 1, 2, 3$$

أيضا

$$(r) \quad e_1 \nabla u_1 + e_2 \nabla u_2 + e_3 \nabla u_3 = (e_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + e_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}) i + (e_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + e_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + e_3 \frac{\partial u_3}{\partial y}) j + (e_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + e_3 \frac{\partial u_3}{\partial z}) k$$

$$(i) \quad \vec{r}_1 \nabla u_1 + \vec{r}_2 \nabla u_2 + \vec{r}_3 \nabla u_3 = (\vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}) i + (\vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial y}) j + (\vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial z}) k$$

سأرى معادلات (i) و (r) في 1, 2, 3

$$(s) \quad \begin{cases} e_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + e_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + e_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = \vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ e_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + e_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + e_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} = \vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ e_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + e_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + e_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} = \vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{cases}$$

موض في المعادلات (r) لـ $p = 1, 2, 3$ في أي من المعادلات (s) وسأرى المعادلات $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \frac{\partial u_3}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_3}{\partial z}$ على كل جانب نجد

$$(i) \quad \begin{cases} e_1 = \vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u_1} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial u_1} \\ e_2 = \vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_2} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial u_2} \\ e_3 = \vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u_3} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_3} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial u_3} \end{cases}$$

التي يمكن أن تكتب

$$(v) \quad e_p = \vec{r}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u_p} + \vec{r}_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_p} + \vec{r}_3 \frac{\partial u_3}{\partial u_p} \quad p = 1, 2, 3$$

أو

$$(A) \quad e_p = \sum_{q=1}^3 \vec{r}_q \frac{\partial u_q}{\partial u_p} \quad p = 1, 2, 3$$

بالكل يمكن أن نرى :

$$(١) \quad \varepsilon_p = \sum_{q=1}^n \varepsilon_q \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \quad p = 1, 2, 3$$

النتيجة السابقة تفردنا لتبني التعريف الآتي . إذا ثلاث كيات c_1, c_2, c_3 لنظام أحداثي (u_1, u_2, u_3) ما حلقة ثلاث كيات أخرى c_1, c_2, c_3 لنظام أحداثيات أخرى (u_1, u_2, u_3) باستخدام معادلات التحول (١) ، (٧) ، (٨) أو (٩) ، إذن تسمى الكيات مركبات المتجه المتجهة الاختلاف أو الكيات المتجهة الاختلاف لصف الأول .

بصمم هنا فإن المبدأ في هذه المسألة وكذلك في المسألة (٣٣) لتراغات ذات أبعاد أقل ، وبصمم مبدأ المتجه لوصولنا لتحليل الكيات المتجهة التي سوف نتعرض لها في الفصل الثامن . في عملية التصميم يكون من المناسب أن نستعمل علامات مختصرة لكي ندير عن الأفكار الأساسية في صيغة موجزة . لابد أن نذكر أنه كانت الرموز المستخدمة لأن الأفكار الأساسية المعالجة في الفصل الثامن تكون مرتبطة ومرتبطة مع تلك التي عولجت في هذا الفصل .

٣٥ - (أ) أثبت أنه في الأحداثيات العامة (u_1, u_2, u_3) .

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} \times \frac{\partial x}{\partial u_3} \right)^2$$

حيث g تكون معاملات $du_1 du_2 du_3$ في ds^2 (مسألة (١٧) .

(ب) بين أن حجم العنصر في الأحداثيات العامة يكون $\sqrt{g} \, du_1 du_2 du_3$.

(أ) من مسألة (١٧)

$$(١) \quad \varepsilon_p q = \varepsilon_p \cdot \varepsilon_q = \frac{\partial x}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_q} = \frac{\partial x}{\partial u_p} \frac{\partial x}{\partial u_q} + \frac{\partial y}{\partial u_p} \frac{\partial y}{\partial u_q} + \frac{\partial z}{\partial u_p} \frac{\partial z}{\partial u_q} \quad p, q = 1, 2, 3$$

إذن باستخدام النظرية الآتية على ضرب المحددات .

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 & a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 & a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 \\ b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 & b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 & b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 & c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 & c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 \end{vmatrix}$$

لدينا

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} \times \frac{\partial x}{\partial u_3} \right)^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix}$$

(ب) حجم العنصر يعطى بالمعادلة :

$$dV = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial u_3} du_3 \right) \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} \times \frac{\partial x}{\partial u_3} \right| du_1 du_2 du_3$$

$$= \sqrt{g} du_1 du_2 du_3$$

لاحظ أن \sqrt{g} هي قيمة مطلقة لـ x, y, z بالنسبة إلى u_1, u_2, u_3 (أنظر مسألة ١٢).

مسائل متنوعة

الإجابة حل هذه المسائل المتنوعة مطابقة في آخر هذا الفصل

٢٦ - اشرح وارسم إحداثي السطوح وإحداثي المنحنيات لكل من :

(أ) الأسطوانة لقطع ناقص (ب) القطبية (ج) الإحداثيات الأسطوانية لقطع مكافئ.

٢٧ - أوجد صيغ التحول (أ) إحداثيات كروية إلى إحداثيات متعامدة (ب) إحداثيات كروية إلى إحداثيات أسطوانية .

٢٨ - عبر في الإحداثيات الكروية عن كل من المحال المتعامدة الآتية :

(أ) الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (ب) الجسم المكافئ $z = x^2 + y^2$ (ب) المخروط $z = 3(x^2 + y^2)$ (د) المستوى $z = 0$ (هـ) المستوى $y = x$ ٢٩ - إذا كان x, y, z, ρ إحداثيات أسطوانية ، اشرح كل المحال المتعامدة واكتب معادلة كل محل تنتمي في الإحداثياتالمتعامدة (أ) $\rho = 4, z = 0$ (ب) $\rho = 4$ (ج) $\phi = \pi/2, z = 1$ (د) $\phi = \pi/2$ ٣٠ - إذا كان u, v, z إحداثيات أسطوانية لقطع ناقص حيث $a = 4$ اشرح كل المحال المتعامدة واكتب معادلة كل محل

تنتمي في الإحداثيات المتعامدة .

(أ) $v = \pi/4$ (ب) $u = 0, z = 0$ (ج) $u = 2, z = 2$ (د) $u = 0, z = 0$ ٣١ - إذا كان u, v, z إحداثيات أسطوانية لقطع مكافئ ، اشرح المنحنيات أو المناطق المحددة بالمعادلات الآتية :(أ) $u = 2, z = 0$ (ب) $u = 1, z = 2$ (ج) $1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3, z = 0$ (د) $1 < u < 2, 2 < v < 3, z = 0$ ٣٢ - (أ) أوجد وحدة المتجهات e_r, e_θ, e_ϕ لنظام الإحداثيات الكروية بدلالة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (ب) حل لكل من $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ بدلالة e_r, e_θ, e_ϕ ٣٣ - مثل المتجه $\mathbf{k} = 3x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ في الإحداثيات الكروية ثم أوجد A_r, A_θ, A_ϕ

٣٤ - أثبت أن نظام الإحداثيات الكروية يكون متعامداً .

- ٤٥ - أثبت أن الأحداثيات الآتية تكون متعامدة : (أ) الأسطوانة لقطع مكافئ* . (ب) الأسطوانة لقطع ناقص .
(ج) الكروية للمفلطحة .
- ٤٦ - أثبت $\dot{\theta}_r = \dot{\theta}_\theta \cos \theta + \sin \theta \dot{\phi}$, $\dot{\theta}_\phi = -\dot{\theta}_r \cos \theta + \sin \theta \dot{\phi}$, $\dot{\phi} = -\sin \theta \dot{\phi} \cos \theta - \cos \theta \dot{\phi}$
- ٤٧ - عبر عن السرعة v والمجلة \mathbf{a} بـسم في الأحداثيات الكروية
- ٤٨ - أوجد مربع عنصر طول قوس وعلامات المقياس المناظرة في : (أ) احداثيات الجسم لقطع مكافئ* .
(ب) الأحداثيات الأسطوانية لقطع ناقص . و(ج) الأحداثيات الكروية للمفلطحة .
- ٤٩ - أوجد حجم العنصر dV في (أ) الجسم لقطع مكافئ* . (ب) الأسطوانة لقطع ناقص و (ج) الأحداثيات القطبية .
- ٥٠ - أوجد (أ) علامات المقياس و (ب) حجم العنصر dV في احداثيات شبه الكرة المتطالة .
- ٥١ - استنتج تعبير للعلامات المقياس في (أ) الأحداثيات لقطع ناقص (ب) الأحداثيات القطبية .
- ٥٢ - أوجد عناصر المساحة لعنصر الجسم في الأحداثيات : (أ) الأسطوانية . (ب) الكروية . (ج) جسم قطع مكافئ* .
- ٥٣ - أثبت أن لشرط اللازم والكافي لأن تكون أحداثيات منحنى الأسلاك متعامدة هو $g_{pq} = 0$ لقيمة $q \neq p$.
- ٥٤ - أوجد الجاكوبيا $J(u_1, u_2, u_3)$ للأحداثيات الآتية : (أ) أسطوانية (ب) كروية (ج) الأسطوانية لقطع مكافئ*
(د) الأسطوانية لقطع ناقص (هـ) شبه الكرة المتطالة .
- ٥٥ - أحسب $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ حيث V المنطقة المحددة بواسطة $(x^2 + y^2) = z$ و $z = 4$.
ملحوظة : استخدم الأحداثيات الأسطوانية :
- ٥٦ - أوجد الحجم الأصغر للمنطقتين المحدتين بواسطة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و $z = x^2 + y^2$.
- ٥٧ - استخدم الأحداثيات الكروية لإيجاد الحجم الأصغر للمنطقتين المحدتين بواسطة كرة نصف قطرها a والمستوى المماس للكرة عند مسافة h من مركزها .
- ٥٨ - (أ) اشرح احداثي السطوح و احداثي المنحنيات للنظام .
$$x^2 - y^2 = 2u_1 \cos u_2, \quad xy = u_1 \sin u_2, \quad z = u_3$$
- (ب) بين أن النظام يكون متعامداً (ج) أوجد : $J(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3})$ لهذا النظام (د) بين أن u_1 و u_2 لها علاقة بالأحداثيات الأسطوانية ρ و ϕ و أوجد هذه العلاقة .
- ٥٩ - أوجد عزم القصور الذاتي للمنطقة المحددة بالمعادلة : $z = 1, xy = 2, xy = 1, x^2 - y^2 = 4, x^2 - y^2 = 2, x^2 - y^2 = 3$ بالنسبة إلى محور z إذا كانت الكثافة ثابتة وتساوي κ ملحوظة : لكن $xy = v, xy = 2u, xy = 2$ و $xy = 3$
- ٦٠ - أوجد $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_3}, \frac{\partial y}{\partial u_1}, \frac{\partial y}{\partial u_2}, \frac{\partial y}{\partial u_3}, \frac{\partial z}{\partial u_1}, \frac{\partial z}{\partial u_2}, \frac{\partial z}{\partial u_3}$ في الأحداثيات (أ) الأسطوانية (ب) الكروية (ج) الأسطوانية لقطع مكافئ* بين أن : $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_4$ لهذه النظم .
- ٦١ - أعطيت تحول الإحداثي : $u_1 = xy, 2u_2 = x^2 + y^2, u_3 = z$ (أ) بين أن نظام الإحداثي لا يكون متعامداً
(ب) أوجد : $J(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3})$ (ج) أوجد $d\mathbf{a}$

٦٧- أوجد $\text{div } \Phi$ و $\text{curl } A$ في الإحداثيات الأسطوانية لتعلم مكافئ.

٦٨- عبر عن $(\mathbf{A})^2$ و $\nabla^2 \mathbf{A}$ في الإحداثيات الكروية.

٦٩- أوجد $\Delta^2 \Phi$ في الإحداثيات الكروية المقطعة.

٧٥- أكتب المعادلة: $\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ في الإحداثيات الأسطوانية لتعلم ناقص.

٦٦- عبر عن معادلة ماكسويل: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ في الإحداثيات شبه الكرة المتطاول.

٦٧- عبر عن معادلة شرودنجر لميكانيكا الكم $\psi(x, y, z) = 0$ في الإحداثيات الأسطوانية لتعلم مكافئ حيث E, m, \hbar ثوابت.

٦٨- أكتب معادلة لابلاس في إحداثيات القطع المكافئ.

٦٩- عبر عن معادلة الحرارة $\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \nabla^2 U$ في الإحداثيات الكروية إذا كانت U غير معتمدة على (θ, ϕ) و ϕ و (ρ, θ, ϕ) و (r, θ, ϕ) و (ρ, θ, ϕ) .

٧٠- أوجد عنصر طول قوس على الكرة التي نصف قطرها a .

٧١- أثبت أنه في أي نظام إحداثيات بفضي الأسلاك المتعامدة يكون $\text{div curl } \mathbf{A} = 0$ و $\text{curl grad } \Phi = 0$.

٧٢- أثبت أن مساحة السطح لخطقة محطة R لسطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ هو $\int_R \sqrt{EG-F^2} du dv$ استخدم هذا لإيجاد مساحة سطح الكرة.

٧٣- أثبت أن المتجه الذي طولُه p وعمودى في كل مكان على السطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ يعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{A} = \pm p \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) / \sqrt{EG-F^2}$$

٧٤- (أ) اشرح مستوى التحويل $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

(ب) تحت أي الشروط تكون الإحداثيات الخطية u, v معتمدة ؟

٧٥- ليكن (x, y) إحداثيات النقطة P في المستوى المتعامد xy وتكون (u, v) إحداثيات النقطة Q في المستوى المتعامد uv إذا كان $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ يقال أنه يوجد تناظر بين النقطة P والنقطة Q

(أ) إذا كان $x = 2u + v$ و $y = u - 2v$ بين أن الخطوط في المستوى xy تناظر الخطوط في المستوى uv

(ب) ما هو المربع المحد بواسطة $x = 0, x = 5, y = 0, y = 5$ المناظر للمستوى uv

(ج) احسب الجاكوبيان $J_{\frac{x, y}{u, v}}$ وبين أن هذه علاقة بنسبة المساحات المربع وصورة في المستوى uv

٧٦- إذا كان $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv$ و $z = 1$ أوجد الصورة (أو الصور) في المستوى uv المربع المحد بواسطة $x = 1, x = 0, y = 1, y = 0$ في المستوى xy

٧٧- بين أنه تحت الشروط المناسبة على F و G أن

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x(x+y)} F(x) G(y) dx dy = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \int_0^t F(u) G(t-u) du \right\} dt$$

ملحوظة : استخدم التحول $x = v$ و $x + y = t$ من المستوى xy إلى المستوى vt النتيجة تكون مهمة في نظريات تحول لابلاس .

٧٨- (أ) إذا كان $x = 3u_1 + u_2 - u_3$, $y = u_1 + 2u_2 + 2u_3$, $z = 2u_1 - u_2 - u_3$ أوجد حجم المكعب المحدد بواسطة $x = 0$, $x = 15$, $y = 0$, $y = 10$, $z = 0$ and $z = 5$ وصورة هذا المكعب في نظام الإحداثيات المتعامدة u_1, u_2, u_3 (ب) أوجد علاقة نسب هذه المجموع إلى الجاكوبيان التحول .

٧٩- ليكن (x, y, z) و (u_1, u_2, u_3) الإحداثيات المتعامدة واحداثيات منحنى الأضلاع على الترتيب لنقطة ما . (أ) إذا كان $x = 2u_1 - u_2 - u_3$, $y = u_1 + 2u_2 + 2u_3$, $z = 3u_1 + u_2 - u_3$ ، حل النظام u_1, u_2, u_3 (ب) أوجد $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$ ؟

(ب) أوجد $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$ و $\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)}$.

(ج) ماضى العلاقة بين هذه المسألة والمسألة السابقة ؟

٨٠- إذا كان $x = u_1^2 + 2$, $y = u_1 + u_2$, $z = u_2^2 - u_1$ أوجد (أ) $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$ (ب) الجاكوبيان $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}$ $J = g$ سقق أن $J = g$

الإجابة على المسائل المتنوعة :

٣٦- (أ) $u = c_1$ و $v = c_2$ يكونان أسطوانة لقطع ناقص وأسطوانة لقطع زائد على الترتيب ، هما محور x مشترك $z = c_3$ تكون مستويات . أنظر شكل ٧-١٨٠ .

(ب) $u = c_1$ و $v = c_2$ تكون أسطوانات دائرية التي تقاطعها بالمستوى xy تكون دوائر مركزها على محور y ومحور x على الترتيب وتتقاطع في زاوية قائمة . الأسطوانات $u = c_1$ كلها تمر خلال النقط $(-a, 0, 0)$ و $(a, 0, 0)$ و $z = c_3$ تكون مستويات . أنظر شكل ٧-٨٠ صفحة ١٨٢ .

احداثي المنحنيات هي تقاطع إحداثي القطوع .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (١) \quad ٧٧$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\rho}{z}, \quad \phi = \phi \quad (ب)$$

$$\theta = \pi/2 \quad (د) \quad r \sin^2 \theta = \cos \theta \quad (ج) \quad \theta = \pi/6 \quad (ب) \quad r = 3 \quad (أ) \quad ٧٨$$

$$(د) \quad \phi = 5\pi/4 \quad \phi = \pi/4 \quad (ب) \quad \phi = \pi/4 \quad (ج) \quad \phi = \pi/4 \quad (أ) \quad ٧٩$$

٣٩- (أ) دائرة $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z = 0$ من المستوى xy (ب) أسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ التي محورها ينطبق على محور z (ج) المستوى xy حيث $y \geq 0$ (د) الخط المستقيم $x = 1$ و $y = \sqrt{3}x$ حيث $x \geq 0$ و $y \geq 0$

٨٠- (أ) أسطوانة لقطع زائد $x^2 - y^2 = 8$ (ب) خط يصل النقط $(4, 0, 0)$ و $(-4, 0, 0)$ أي أن $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ حيث $-4 \leq t \leq 4$

$$(ج) \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad z = 2 \quad (د) \quad \text{جزء من محور } x \text{ معرف } x \geq 4, y = 0$$

$$(أ) \quad \text{قطع مكاني} \quad z = 0 \quad \text{و} \quad (ب) \quad \text{قطع مكاني} \quad z = 2 \quad (ج) \quad \text{قطع مكاني} \quad z = 2 \quad (د) \quad \text{قطع مكاني} \quad z = 2$$

(ج) منطقة في المستوى xy محددة بالقطع المكافئ $z^2 = 8(x+2)$, $z^2 = -8(x-2)$, $z^2 = -2(x-1/2)$ و $z^2 = 2(x+5/2)$ (د) حل (ج) ماعدا الخلود .

$$e_r = \sin \theta \cos \phi \, i + \sin \theta \sin \phi \, j + \cos \theta \, k \quad (1) - 17$$

$$e_\theta = \cos \theta \cos \phi \, i + \cos \theta \sin \phi \, j - \sin \theta \, k$$

$$e_\phi = -\sin \phi \, i + \cos \phi \, j$$

$$i = \sin \theta \cos \phi \, e_r + \cos \theta \cos \phi \, e_\theta - \sin \phi \, e_\phi \quad (ب)$$

$$j = \sin \theta \sin \phi \, e_r + \cos \theta \sin \phi \, e_\theta + \cos \phi \, e_\phi$$

$$k = \cos \theta \, e_r - \sin \theta \, e_\theta$$

$$\nabla \cdot A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\phi e_\phi - \xi \, v$$

$$A_r = 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - r \sin \theta \cos \theta \sin \phi + 3r \sin \theta \cos \theta \cos \phi$$

$$A_\theta = 2r \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi - r \cos^2 \theta \sin \phi - 3r \sin^2 \theta \cos \phi$$

$$A_\phi = -2r \sin \theta \sin^2 \phi - r \cos \theta \cos \phi$$

$$v = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_\phi e_\phi \quad v_r = \dot{r}, v_\theta = r \dot{\theta}, v_\phi = r \sin \theta \dot{\phi} \quad - 18$$

$$u = u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_\phi e_\phi \quad u_r = \dot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

$$u_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})$$

$$ds^2 = (u^2 + v^2) (du^2 + dv^2) + u^2 v^2 d\phi^2, \quad h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\phi = uv \quad (1) - 19$$

$$ds^2 = a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v) (du^2 + dv^2) + dz^2, \quad h_u = h_v = a \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad h_z = 1 \quad (ب)$$

$$ds^2 = a^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) (d\xi^2 + d\eta^2) + e^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta d\phi^2, \quad (ج)$$

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_\phi = e \cosh \xi \cos \eta$$

$$\frac{a^2 d\xi d\eta dz}{(\cosh u - \cos v)^2} \quad (د) \quad a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v) du dv dz \quad (هـ) \quad uv (u^2 + v^2) du dv d\phi \quad (1) - 20$$

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_\phi = e \sinh \xi \sin \eta \quad (1) - 21$$

$$a^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) \sinh \xi \sin \eta d\xi d\eta d\phi \quad (ب)$$

$$\rho d\rho d\phi, \quad \rho d\phi dz, \quad d\rho dz \quad (1) - 22$$

$$r \sin \theta dr d\phi, \quad r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad r dr d\theta \quad (ب)$$

$$(u^2 + v^2) du dv, \quad uv \sqrt{u^2 + v^2} du d\phi, \quad uv \sqrt{u^2 + v^2} dv d\phi \quad (ج)$$

$$a^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta) \sinh \xi \sin \eta \quad (أ) \quad a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v) \quad (ب) \quad u^2 + v^2 \quad (ج) \quad r^2 \sin \theta \quad (د) \quad \rho \quad (1) - 23$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \rho^2, \quad u_2 = 2\phi \quad (أ) \quad \left(\frac{4}{3} \right) - 0.8 \frac{\pi}{3} (2a^2 - 3a^2 k + k^2) - 0.7 \frac{64\pi(2 - \sqrt{2})}{3} - 0.7 \frac{256\pi}{18} - 0.8$$

$$2k - 0.4$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \cos \phi \, i + \sin \phi \, j, \quad \nabla \rho = \frac{x \, i + y \, j}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \phi \, i + \sin \phi \, j \quad (1) - 24$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \, i + \rho \cos \phi \, j, \quad \nabla \phi = \frac{-\sin \phi \, i + \cos \phi \, j}{\rho}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = k, \quad \nabla x = k$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - r \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{i} + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{j}$$

$$\nabla_r = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\nabla_\theta = \frac{zx\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}}{r}$$

$$\nabla_\phi = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}}{r \sin \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = -v\mathbf{i} + u\mathbf{j}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{k} \quad (\text{ج})$$

$$\nabla_u = \frac{u\mathbf{i} + v\mathbf{j}}{u^2 + v^2}, \quad \nabla_v = \frac{-v\mathbf{i} + u\mathbf{j}}{u^2 + v^2}, \quad \nabla_z = \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{e}_r = \frac{(x^2 + y^2)(du_1^2 + du_2^2) - 2xy du_1 du_2 + du_3^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2u_1 du_1 du_2 + du_3^2}{2(u_1^2 - u_2^2)} + du_3^2 (\text{د}) \quad \frac{1}{y^2 - z^2} \quad (\text{هـ}) - ١١$$

$$\nabla \Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad - ١٢$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 + v^2} A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{u^2 + v^2} A_v) \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{A} &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\left\{ \frac{\partial A_z}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{u^2 + v^2} A_v) \right\} \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_u \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{u^2 + v^2} A_u) - \frac{\partial A_z}{\partial u} \right\} \sqrt{u^2 + v^2} \mathbf{e}_v \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2 + v^2} A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{u^2 + v^2} A_u) \right\} \mathbf{e}_z \right] \end{aligned}$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (1) - ١٣$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{و})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{a^2 \cosh^2 \xi (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \frac{\partial}{\partial \xi} (\cosh \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi}) \\ &\quad + \frac{1}{a^2 \cos \eta (\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (\cos \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta}) + \frac{1}{a^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad - ١٤$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = a^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v) \Phi \quad - ١٥$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{aR^2 S^2} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} (R E_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (S E_\eta) \right\} S E_\xi \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} (S E_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (R E_\phi) \right\} S E_\eta + \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (S E_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (S E_\xi) \right\} R E_\phi \left. \right] \\ &= -\frac{1}{S} \frac{\partial H_\xi}{\partial \xi} E_\xi - \frac{1}{S} \frac{\partial H_\eta}{\partial \eta} E_\eta - \frac{1}{S} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} E_\phi \end{aligned} \quad - ١٦$$

$$R = \sinh \xi \sin \eta \quad S = \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} \quad \text{حيث} \quad \dots \quad (١٧)$$

$$\frac{1}{u^2+v^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - W(u, v, z)) \psi = 0, \quad W(u, v, z) = V(x, y, z)$$

$$uv^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + u^2 v \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + (u^2 + v^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (١٨)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] \quad (١) - ١٩$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] \quad (c) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \quad (d) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 \quad (٢)$$

$$ds^2 = a^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (٧٠)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad (٧١)$$

$$\text{Jacobian} = 10 \quad (٧) \quad 750, 75, \quad (١) - ٧٨$$

$$d^2 = 14 du_1^2 + 6 du_2^2 + 6 du_3^2 + 6 du_1 du_2 - 6 du_1 du_3 + 8 du_2 du_3, \quad g = 100 \quad (٧) \quad \text{No} \quad (١) - ٧٩$$

$$I = 4m_1 u_0 \quad (٧) \quad g = 16u_1^2 u_2^2 \quad (١) - ٨٠$$

الفصل الثامن

تحليل الكمية الممتدة

قوانين هيزنبرغية : يجب أن لا تتوقف على نظام إحداثي خاص يستعمل في شرحها الرياضي إذا أريد لها أن تكون صالحة .

الانزاسة المترتبة على هذه المتطلبات تقودنا إلى تحليل الكمية الممتدة ، التي لها فائدة عظيمة في النظرية النسبية العامة ، علم المتسعة التفاضلية ، الميكانيكا ، المرونة ، الأندرو ديناميكا ، النظرية الكهرومغناطيسية ومجالات أخرى متعددة في العلوم والهندسة .

المرافقت ذات الأبعاد القوية : في الفراغ في الأبعاد الثلاثة نحدد النقطة مجموعة من ثلاثة أرقام ؛ تسمى إحداثيات ، تبين بتوصيف نظام إحداثيات خاص أو إطار للمقارنة . كنثال (x, y, z) ، (p, ϕ, π) ، (r, θ, ϕ) . تكون إحداثيات نقطة في النظام المبرسدى ، النظام الأسطوانى والنظام الكروى على الترتيب . نقطة في الفراغ في الأبعاد التولية تكون ، بالانشابه مكونة من مجموعة أرقام N يرمز لها (x^1, x^2, \dots, x^N) حيث $(1, 2, \dots, N)$ أخذت ليست كأس ولكن كرمز حلوى ، وهي سياسة سيثبت أهميتها .

الحقيقة لا يمكننا تصور نقط في فراغ في أبعاد أكثر من ثلاثة أبعاد ليس لها بالطبع أى تأثير أو خلافة بوجود هذه النقط .

تحويلات الإحداثى : لكن (x^1, x^2, \dots, x^N) و $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ إحداثيات نقطة في إطارى مقارنة مختلفين . لفترض وجود N من العلاقات المستقلة بين إحداثيات النظامين يكون . لما الصيغ

$$(1) \quad \begin{aligned} x^1 &= x'^1(x'^1, x'^2, \dots, x'^N) \\ x^2 &= x'^2(x'^1, x'^2, \dots, x'^N) \\ &\vdots \\ x^N &= x'^N(x'^1, x'^2, \dots, x'^N) \end{aligned}$$

والتي يمكن أن نلبيها باختصار كالآتي

$$(2) \quad x^k = x'^k(x'^1, x'^2, \dots, x'^N) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

حيث فرض أن الدوال المتضمنة فياً فردية ومستمرة ولها مشتقات مستمرة ، وبالعكس لكل فئة إحداثيات $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ تناظر فئة وسيطة (x^1, x^2, \dots, x^N) مطابقة بالآتي

$$(3) \quad x_k = x'_k(x'^1, x'^2, \dots, x'^N) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

العلاقات (٢) أو (٣) تعرف تحول الأحداثيات من إطار مقارن إلى آخر .

اصطلاح التجميع : في كتابة تعبير مثل $a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$ يمكننا استعمال رمز قصير $\sum_{j=1}^N a_j x^j$. باستخدام رمز أكثر قصراً يمكننا ببساطة أن نكتبه $a_j x^j$ ، حيث نختل هذا الاصطلاح عندما يكون الأس (رمزاً سفلياً أو رمزاً علوياً) مكرراً في حد معطى يمكننا أن نجعل هذا الأس من ١ إلى N إذا ما لم يوصف غير هذا . يسمى هذا اصطلاح التجميع . بوضوح ، بدلا من استعمال الأس j يمكننا استعمال حرف آخر ، مثل p ، والمجموع يمكن كتابته $a_p x^p$. أي أس يكرر في حد معطى ، بحيث أنه يمكن تطبيق اصطلاح التجميع عليه ، يسمى الأس النمية أو الأس المظلل .

الأس الذي يقع مرة واحدة فقط في حد معطى يسمى أس حر ويمكن أن يكون لأي من الأعداد $1, 2, \dots, N$ مثل K في المعادلة (٢) أو (٣) كلاهما يمثل N من المعادلات .

متجهات المتضادة الاختلافات ومتحدة الاختلاف : إذا كانت N من الكميات A^1, A^2, \dots, A^N في نظام إحداثي x^1, x^2, \dots, x^N مرتبطة بمقدار N من كميات أخرى x^1, x^2, \dots, x^N باستخدام معادلات التحول

$$\bar{A}^p = \sum_{q=1}^N \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q \quad p = 1, 2, \dots, N$$

التي باستخدام الاصطلاحات المتناهية يمكن ببساطة كتابتها كالآتي

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q$$

وهي تسمى مركبات المتجه المتضادة للاختلاف أو الكمية المعكدة المتضادة للاختلاف من المرتبة الأولى أو المرتبة الأولى . لتسلي البائع لهذا ولتحويلات أخرى ، أنظر مسائل ٣٣ و ٣٤ فصل ٧ .

إذا كانت N من الكميات A_1, A_2, \dots, A_N في نظام إحداثي x^1, x^2, \dots, x^N مرتبطة بمقدار N من كميات أخرى $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_N$ في نظام إحداثي آخر $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N$ بواسطة معادلات التحول

$$\bar{A}_p = \sum_{q=1}^N \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q \quad p = 1, 2, \dots, N$$

أو

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q$$

وهي تسمى مركبات المتجه المتجهة للاختلاف أو الكمية المسكدة المتجهة للاختلاف من المرتبة الأولى أو المرتبة الأولى .

تذكر أن الرمز العلوي يستخدم ليعين المركبات المتضادة للاختلاف بينما الرمز السفلي يستخدم ليعين المركبات المتجهة للاختلاف ويحدث استثناء في الرموز للأحداثيات .

بدلاً من الحديث عن الكمية الممتدة التي مركبتها A^p أو A^q سترجع دائماً ببساطة إلى الكمية الممتدة A^p أو A^q لا يجب أن يظهر التباس لذلك .

الكميات الممتدة المتضادة الاختلاف ، المتضادة الاختلاف والمختلطة : إذا كانت N^2 من الكميات A^{qs} في نظام إحداثي (x^1, x^2, \dots, x^N) مرتبطة بالمقدار N^2 من كميات أخرى \bar{A}^{pr} في نظام إحداثي آخر $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ باستخدام معادلات التحول

$$\bar{A}^{pr} = \sum_{s=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} A^{qs} \quad p, r = 1, 2, \dots, N$$

$$\bar{A}^{pr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} A^{qs}$$

بإصلاحات المتينة فهي تسمى المركبات المتضادة الاختلاف للكمية الممتدة من المرتبة الثانية أو فئة اثنين

N^2 من الكميات A^{qs} تسمى المركبات المتضادة الاختلاف للكمية الممتدة من المرتبة الثانية إذا كان

$$\bar{A}^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^q} A^{qs}$$

بالمثل N^2 من الكميات A_s^q تسمى مركبات مختلطة للكمية الممتدة الاختلاف من المرتبة الثانية إذا كان

$$\bar{A}_r^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^r} A_s^q$$

الكرونكر دلتا : نكتب δ_{ij}^k تكون معرفة كالآتي .

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } i = k \\ 0 & \text{إذا كان } i \neq k \end{cases}$$

وكا يبين رمزها ، فإنها كمية ممتدة مختلطة من المرتبة الثانية .

كميات ممتدة من وثبة أكبر من اثنين : تعرف بسهولة . كمال A_{h1}^{qs} من المركبات المختلطة الكمية الممتدة من المرتبة ٣ ، متضادة الاختلاف من المرتبة ٢ ومتضادة الاختلاف من المرتبة ١ ، ٢

إذا حولوا تبعاً للعلاقة

$$\bar{A}_{ij}^{prqs} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^u} \frac{\partial \bar{x}^v}{\partial x^w} \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^t} \frac{\partial x^w}{\partial \bar{x}^v} A_{h1}^{qs}$$

الكميات الممتدة أو الثوابت : نفرض أن ϕ دالة في الإحداثيات x ، ولتكن ϕ ترمز لقيمة الدالة تحت تحول إلى فئة جديدة من الإحداثيات x' إذن ϕ تسمى كمية عديدة أو ثابت بالنسبة لإحداثيات التحول إذا كان $\phi = \phi'$. أي كمية أو ثابت تسمى أيضاً كمية ممتدة من المرتبة صفر .

مجالات الكمية الممتدة : إذا كان لكل نقطة لمنطقة في فراغ أبعاد N تناظر كمية ممتدة محددة ، نقول أن مجال كمية ممتدة قد عرفت . حلاً هو مجال متجه أو مجال كمية عديدة تبعاً لما إذا كانت الكمية الممتدة من المرتبة الأول أو صفراً . يجب أن يلاحظ أن كمية ممتدة أو مجال كمية ممتدة ليس فقط فئة من مركباتها في نظام إحداثي خاص ولكن كل الثنائيات الممكنة تحت أي تحول للأحداثيات .

التماثل والتماثل المتخالف للكمية الممتدة : كمية ممتدة تسمى متماثلة بالنسبة إلى إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف أو إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف إذا كانت مركباتها تبقى بدون تغير مع تبادل الأسس . لذلك إذا كان $A_{qs}^{pr} = A_{qs}^{pr}$ فإن الكمية الممتدة تكون متماثلة في p و m . إذا كانت الكمية الممتدة متماثلة بالنسبة لأي إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف ولأي إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف تسمى متماثلة .

كمية ممتدة تسمى تماثل متخالف بالنسبة إلى إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف أو إلى إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف إذا كانت مركباتها تغير إشاراتهما مع تبادل الأسس .

ذلك إذا $A_{qs}^{pr} = -A_{qs}^{pr}$ الكمية الممتدة تكون تماثل متخالف في p و m . إذا كانت الكمية الممتدة متخالفة التماثل بالنسبة إلى أي إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف أو أي إثنين من الأسس المتضادة الإختلاف تسمى تماثلاً متخالفاً .

عمليات أساسية بالكميات الممتدة :

١ - **الإضافة :** الجسع لإثنين أو أكثر من الكميات المستقلة من نفس المرتبة والنوع (أي أن نفس العدد من الأسس المتضادة الإختلاف ونفس العدد من الأسس المتضادة الإختلاف) يكون أيضاً كمية ممتدة من نفس المرتبة والنوع . لذلك إذا كان $A_{qs}^{pr} = A_{qs}^{pr}$ تكون كمية ممتدة ، إذن $C_{q'}^{pr} = A_{q'}^{pr} + B_{q'}^{pr}$ تكون أيضاً كمية ممتدة . إضافة الكميات المستقلة يمتنع لتناظر التوافق وقانون التبديل .

٢ - **الطرح :** الفرق بين كيتين ممتدتين من نفس المرتبة والنوع يكون أيضاً كمية ممتدة من نفس المرتبة والنوع . لذلك إذا كان A_{qs}^{pr} و B_{qs}^{pr} كميات ممتدة ، إذن $B_{qs}^{pr} - A_{qs}^{pr} = C_{qs}^{pr}$ تكون أيضاً كمية ممتدة .

الضرب الخارجي : حاصل ضرب كيتين ممتدتين تكون كمية ممتدة مرتبتها هي مجموع مرتبات الكميات المستقلة الممتدة . حاصل الضرب هذا يتفرض ضرباً عادياً لمركبات الكميات المستقلة يسمى حاصل الضرب الخارجي . كتال $C_{qs}^{pr} = A_{qs}^{pr} B_{qs}^{pr}$ هو حاصل الضرب الخارجي لكل من A_{qs}^{pr} و B_{qs}^{pr} حل كل حال ، لاحظ أنه

ليس كل كمية ممتدة يمكن كتابتها كمعامل ضرب كيتين ممتدتين لمرتبة أدنى . لهذا السبب فإن قسمه الكميات الممتدة ليست دائماً ممكنة .

٤ - **الانكماش (التقليص) :** إذا كان s واحد متضاد الاختلاف وأ s واحد متحد الاختلاف لكمية ممتدة وضما مضاريان ، فإن النتيجة تبين أن الجمع على الأسس المتساوية تكون قد أخذت تبجاً لاصطلاح التجميع . هذه النتيجة للجمع هي كمية ممتدة من مرتبة إثنين أقل من الكمية الممتدة الأصلية . العملية تسمى الانكماش . مثال ، في كمية ممتدة من المرتبة ٥ ، A_{pq}^{spp} ، ضع $r = s$ للحصول على $A_{pq}^{spp} = B_{pq}^{spp}$ كمية ممتدة من مرتبة ٣ . أيضاً ، بوضع $p = q$ نحصل على $B_{pp}^{spp} = C^{spp}$ كمية ممتدة من مرتبة ١ .

٥ - **ضرب داخلي :** بعملية الضرب الخارجى لكتيتين ممتدتين متجوعة بانكماش نحصل على كمية ممتدة جديدة تسمى حاصل ضرب داخل لكميات الممتدة المطاة تسمى هذه العملية ضرباً داخلياً . مثال ، أعطيت الكميات الممتدة A_{pq}^{spp} و B_{pq}^{spp} ، حاصل الضرب الخارجى يكون $A_{pq}^{spp} B_{pq}^{spp}$. ليكن $r = q$ ، نحصل على حاصل الضرب الداخلى $A_{pp}^{spp} B_{pp}^{spp}$. ضع $r = p$ و $q = s$ ، نحصل على حاصل ضرب داخل آخر $A_{pq}^{spp} B_{pq}^{spp}$. الضرب الداخلى والخارجى للكميات الممتدة تكون تبادلية ومتوافقة .

٦ - **قانون خارج القسمة :** نفترض أنه غير معروف ما إذا كان للكمية X هي كمية ممتدة أم لا . إذا كان حاصل الضرب الداخلى للكمية X بكمية ممتدة اختيارية ، يكون نفسها كمية ممتدة إذن X يكون أيضاً كمية ممتدة هذا يسمى قانون خارج القسمة .

المصفوفات : مصفوفة من الرتبة m في n تكون عبارة عن مجموعة مرتبة من الكميات a_{pq} ، تسمى عناصر ، نظمت في صفوف m وأعمدة n وهوماً يرمز لها كالآتي

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أو في صيغة مختصرة تكون a_{pq} ، $p=1, \dots, m$; $q=1, \dots, n$. إذا كان $m = n$ فإن المصفوفة تكون مصفوفة مربعة من الرتبة m في m أو ببساطة m ، إذ كان $m = 1$ تكون مصفوفة صف أو متجه صف ، إذا كان $n = 1$ تكون مصفوفة عمود أو متجه عمود .

قطر المصفوفة المربعة يسمى العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ يسمى القطر الأساسى أو القطر الرئيسى . المصفوفة المربعة التي عناصرها تساوى واحد في القطر الأساسى وصفرًا في أى مكان آخر تسمى وحدة مصفوفة وتعرف بالرمز I . المصفوفة المترتبة (الصفرية) حرف بالرمز O ، تكون مصفوفة كل عناصرها تساوى صفرًا .

جبر المصفوفات : إذا كان $A = (a_{pq})$ و $B = (b_{pq})$ هي مصفوفات لها نفس الرتبة (n في m) إذن :

$$1 - A = B \text{ إذا وإذا كان فقط } a_{pq} = b_{pq}$$

٢ - المجموع S والفرق D تكون عبارة عن مصفوفات معرفة كالآتي

$$S = A+B = (a_{pq}+b_{pq}), \quad D = A-B = (a_{pq}-b_{pq})$$

٣ - حاصل الضرب $P = AB$ معرفة فقط عندما يكون عدد الأعمدة n في المصفوفة A يساوي عدد الصفوف في المصفوفة B ويسمى بالمادة

$$P = AB = (a_{pq})(b_{pq}) = (a_{pq}b_{pq})$$

حيث $a_{pq}b_{pq} = \sum_{p=1}^n a_{pq}b_{pq}$ باستخدام اصطلاح التجميع . المصفوفات التي يكون حاصل ضربها مربعاً تسمى متوافقة .

عموماً ، ضرب المصفوفات غير تبادلي ، أي أن $AB \neq BA$ ، حل كل حال فإن قانون التوافق لضرب المصفوفات يكون سارياً أي أن $A(BC) = (AB)C$ بشرط أن تكون المصفوفات متوافقة . أيضاً يكون قانون التوزيع سارياً ، أي أن $A(B+C) = AB+AC$ ، $(A+B)C = AC+BC$.

٤ - المحدد للمصفوفة المربعة $A = (a_{pq})$ يرمز له كالتالي $|a_{pq}|$ ، $\det A$ ، أو $\det(a_{pq})$

إذا كان $P = AB$ إذن $|P| = |A||B|$

٥ - العكس لمصفوفة مربعة A هي مصفوفة A^{-1} بحيث أن $AA^{-1} = I$ هي وحدة مصفوفة . الشرط اللازم والكافي لكي يكون A^{-1} موجود هو أن $\det A \neq 0$. إذا كان $A = 0$ فإن A تسمى مصفوفة فردية .

٦ - حاصل ضرب الكمية المتجهة λ في المصفوفة $A = (a_{pq})$ يرمز لها λA ، يكون المصفوفة (λa_{pq}) حيث كل عنصر المصفوفة A يكون مضروباً في λ

٧ - تبديل وضع المصفوفة A يكون مصفوفة AT التي كونت من A بواسطة تبديل صفوفها وأعمدتها . لذلك إذا كان $A = (a_{pq})$ ، إذن $AT = (a_{pq})$ تبديل وضع المصفوفة A يرمز له أيضاً A

عنصر الخط وكمية ممتدة مقوية : في الإحداثيات السpherical (r, θ, ϕ) تتنازل طول القوس ds يمكن الحصول عليه من $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ بالتحويل إلى إحداثيات متنى الأنواع

العامة (أنظر مسألة ١٧ ، فصل ٧) هذا يصبح $ds^2 = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n g_{pq} dx^p dx^q$. مثل هذه القراءات تسمى القراءات

الأقليدية ذات الأبعاد الثلاثة *Eucldidean spaces* .

يكون تعميم الفراغ ذو N من أبعاد بالإحداثيات (x^1, x^2, \dots, x^N) مبالراً . نعرف عنصر الخط ds في هذا الفراغ بإحدى الصيغتين الرابعة ، تسمى صيغة مترية أو مترى .

$$dx^2 = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^I g_{pq} dx^p dx^q$$

أر ، باستخدام اصطلاح التجميع

$$dx^2 = g_{pq} dx^p dx^q$$

في الحالة الخاصة حيث يوجد تحول الإحداثيات من x إلى \bar{x} بحيث أن الصيغة المترتبة تكون قد حولت إلى $d\bar{x}^h d\bar{x}^h$ or $(d\bar{x}^1)^2 + (d\bar{x}^2)^2 + \dots + (d\bar{x}^I)^2$ وبالتالي يسمى الفراغ فراغ إقليدس ذو N من ابعاد . في الحالة العامة حل كل حال ، يسمى الفراغ *Riemannian* .

الكيات g_{pq} هي مركبات الكمية الممتدة متحدة الاختلاف من المرتبة اثنين تسمى كمية ممتدة مترتبة أو كمية ممتدة أساسية . يمكننا ودائماً اختيار هذه الكمية الممتدة لتكون متجانسة (أنظر مسألة ٢٩) .

ترافق (اقتران) أو تعاكس — مقولوب — الكيفيات الممتدة : ليكن $|g_{pq}|$ ترمز لحدود بالانصاف بواسطة g^{pq} وافرض $g \neq 0$. عرف g^{pq} بواسطة

$$g^{pq} = \frac{\text{cofactor of } g_{pq}}{|g|}$$

إذن g^{pq} تكون كمية ممتدة متجانسة ومتضادة الاختلاف من المرتبة الثانية تسمى موافق أو معاكس الكمية الممتدة للقيمة g_{pq} (أنظر مسألة ٢٤) . يمكن أيضاً (مسألة ٢٢) أن

$$g^{pq} g_{rq} = \delta^p_r$$

كميات ممتدة متوافقة (متشابهة) : معنى كمية ممتدة ، يمكننا اشتقاق كيات ممتدة أخرى بواسطة رفع أو خفض الأس . كثال ، معنى الكمية الممتدة g_{pq} نحصل بواسطة رفع الأس P على الكمية الممتدة AP^q وتبين النقطة المكان الأصل للأش المتحرك . رفع الأس q نحصل أيضاً على AP^q . حتى لا يحدث لبس يمكن عاده أن نحدد التسمية ، لذلك AP^q يمكن أن نكتب AP^q هذه الكيات الممتدة المشتقة يمكن الحصول عليها بتكوين التفرجات الداخلية للكمية الممتدة المخرية g_{pq} أو مراقبتها (قريباً) g^{pq} لذلك ، كثال

$$A^p_q = g^{pq} A_{rq}, \quad A^{pq} = g^{pq} g^{rs} A_{rs}, \quad A^p_{rs} = g^{pq} A_{p..s}$$

$$A^{pm..n} = g^{pk} g_{sn} g^{rm} A^{q..st}$$

يصح ذلك واضحاً إذا فسرنا التفرجات في g^{pq} كمن : ليكن $r = p$ (أو $r = q$) أما يتبع . ورفع هذا الأس . بالمثل إذا فسرنا التفرجات في g_{pq} كمن : ليكن $r = q$ (أو $r = p$) أما يتبع وانخفض هذا الأس .

$$A_p = g_{pq} A^q \quad \text{and} \quad A^p = g^{pq} A_q$$

المعدنية. تعرف الطول L لمتجه AP أو A_p كما هو مطلق بالمعادلة

يمكننا تعريف الزاوية θ بين AP و B_p كما هو موضح بالملاحظة

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} = \delta^{ST} [pq, r]$$

نسمى رموز كريستوفيل النوع الأول والثاني على الترتيب . تستعمل رموز أخرى بإذنا من $\left\{ \frac{bd}{g} \right\}$ وهي $\{pq\}$ عدد Γ_{pq}^s . والرمز الأخير يقترح على أي حال خواص السكينة المشددة التي لا تكون حقيقية بصفة عامة .

قوانين التحول لرموز كريستوفيل : إذا رمزنا بشرطة أفقية لرمز في نظام إحداثي x^i إذن

$$\overline{\{jk, m\}} = [pq, r] \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m} + g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}$$

$$\overline{\left\{ \frac{n}{jk} \right\}} = \left\{ \frac{s}{pq} \right\} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}$$

هي قوانين للتحول لرموز كريستوفيل تبين أنهم ليسوا كميات متجهة إلا إذا كانت الحدود الثانية على اليمين تساوى صفراً .

جوديسيفت (علم المساحة — التطبيقية) : المسافة s بين نقطتين t_1 و t_2 على منحنى $x^r = x^r(t)$ في فراغ ريمان Riemannian . يعطى بالمعادلة

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt}} dt$$

ذلك المنحنى في الفراغ الذي يمثل المسافة أقل ما يمكن يسمى جيوديسى الفراغ . باستعمال حساب التفاضل والتكامل المتغيرات (أنظر مسائل ٥٠ و ٥١) توجد الجيوديسية من المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \left\{ \frac{r}{pq} \right\} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

حيث S هو إرابتير طول القوس . كأنشلة ، الجيوديسيات على مستوى يكون خطوطاً مستقيمة والجيوديسيات على كرة تكون أقواس دوائر كبيرة .

المشتقات المتجهة للاختلاف : لنكية متجهة A_p بالنسبة إلى x^q تبين بالرمز A_{pq} وتعرف بالمعادلة

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \frac{s}{pq} \right\} A_s$$

نكية متجهة متجهة للاختلاف من المرتبة الثانية .

المشتقة المتجهة للاختلاف لنكية متجهة AP بالنسبة إلى x^q تبين بالرمز A^p_{pq} وتعرف بالمعادلة

$$A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ \frac{p}{qs} \right\} A^s$$

- هي كمية متدة مختلفة من المرتبة اثنين .

النظم العمودية ، تكون رموز كريستوفيل صفرًا والمشتقات متحدة الاختلاف تكون هي المشتقات الجزئية العادية .
المشتقات المتحدة الاختلاف لكميات المتحدة تكون أيضاً كميات متدة (أنظر مسألة ٥٢)

يمكن سرمان النتائج السابقة إلى مشتقات متحدة الاختلاف الكميات المتحدة ذات مرتبة أعلى لذلك فإن

$$\begin{aligned} \frac{P_1 \dots P_n}{r_1 \dots r_n q} &= \frac{\partial A_{r_1 \dots r_n}^{P_1 \dots P_n}}{\partial x^q} \\ &= - \left\{ \begin{matrix} s \\ r_1 q \end{matrix} \right\} A_{r_2 \dots r_n}^{P_1 \dots P_n} - \left\{ \begin{matrix} s \\ r_2 q \end{matrix} \right\} A_{r_1 \dots r_n}^{P_1 \dots P_n} - \dots - \left\{ \begin{matrix} s \\ r_n q \end{matrix} \right\} A_{r_1 \dots r_{n-1}}^{P_1 \dots P_n} \\ &+ \left\{ \begin{matrix} P_1 \\ q s \end{matrix} \right\} A_{r_1 \dots r_n}^{P_2 \dots P_n} + \left\{ \begin{matrix} P_2 \\ q s \end{matrix} \right\} A_{r_1 \dots r_n}^{P_1 P_3 \dots P_n} + \dots + \left\{ \begin{matrix} P_n \\ q s \end{matrix} \right\} A_{r_1 \dots r_n}^{P_1 \dots P_{n-1} P_n} \end{aligned}$$

هي مشتقة متحدة الاختلاف المقدار $A_{r_1 \dots r_n}^{P_1 \dots P_n}$ بالنسبة إلى x^q

قوانين التفاضل المتحدة الاختلاف لحاصل جمع وحاصل ضرب الكميات المتحدة تكون مثلها مثل تلك التي لتفاضل العادي .
في إجراء التفاضل ، الكميات المتحدة $\frac{\partial}{\partial q}$ و $\frac{\partial}{\partial p}$ ويمكن أن تعامل ككوابت حيث مشتقاتها المتحدة الاختلاف تكون صفرًا (أنظر مسألة ٥٤) حيث أن المشتقات المتحدة الاختلاف تغير عن معدل التغير لكميات فيزيائية مستقلة عن أي إطارات مقارنة . فإنها ذات أهمية عظمى في التعبير عن القوانين الفيزيائية .

رموز التبديل والكميات المتحدة عرف ϵ_{pqrs} بالعلاقة

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1, \quad \epsilon_{pqr} = 0$$

متساوية وتعرف ϵ^{pqrs} بنفس الطريقة .

إن الرموز ϵ_{pqrs} و ϵ^{pqrs} تسمى رموز تبادلية في فراغ ذو ثلاث أبعاد

أعبراً ، دعنا نعريف

$$\epsilon^{pqrs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{pqrs}, \quad \epsilon^{pqrs} = \sqrt{g} \epsilon_{pqrs}$$

يمكن أن نبين أن ϵ_{pqrs} و ϵ^{pqrs} هي كميات متدة متحدة الاختلاف ومتضادة الاختلاف على الترتيب ، تسمى كميات متدة تبادلية . في فراغ ثلاث الأبعاد . يمكن أيضاً تمثيل ذلك لأبعاد أعلى (أكثر من ثلاث أبعاد)

صفة الكمية الممتدة للانحدار والتباين والانتشار :

١ - **الانحدار** : إذا كانت Φ كمية عددية أو ثابت فإن الانحدار Φ يعرف بالمعادلة

$$\nabla \Phi = \text{grad } \Phi = \Phi_{,p} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^p}$$

حيث $\Phi_{,p}$ تكون مشتقات متحدة الاختلاف الكمية Φ بالنسبة إلى x^p

٢ - **تباين** : التباين الكمية A^p هي الانكاش لمشتقاتها المتحدة الاختلاف بالنسبة إلى x^q ، أي أنه الانكاش الكمية $A^p_{,q}$ إذن .

$$\text{div } A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} (\sqrt{g} A^p)$$

٣ - **التفاف** : الالتفاف الكمية A_p هو $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p}$ كمية ممتدة من المرتبة اثنين . يعرف أيضاً الالتفاف (التورج) بالكمية A_{pq} $\in \mathbb{R}^{pq}$

٤ - **لا بلاس** : اللابلاسي Φ هو التباين للانحدار Φ أو

$$\nabla^2 \Phi = \text{div } \Phi_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} (\sqrt{g} g^{pq} \frac{\partial \Phi}{\partial x^q})$$

في حالة $g < 0$ لابد أن نستبدل \sqrt{g} القيمة $\sqrt{-g}$. كلتا الحالتين $g > 0$ و $g < 0$ يمكن أن نحوى بكتابة $\sqrt{|g|}$ بدلاً من \sqrt{g} .

المشتقة الذاتية أو الحلقية : كمية A_p على طول المنحنى $x^q = x^q(t)$ يرمز لها $\frac{\partial A_p}{\partial t}$ ، تكون قد عرفت على

أنها حاصل ضرب داخل القيمة المتحدة الاختلاف الكمية $\frac{dx^q}{dt}$ و A_p ، أي أن

$$\frac{dA_p}{dt} \text{ وتسمى بالمعادلة}$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} = \frac{dA_p}{dt} - \left\{ \begin{matrix} p \\ q r \end{matrix} \right\} A_r \frac{dx^q}{dt}$$

بالحل لمسوف

$$\frac{\partial A^p}{\partial t} = \frac{dA^p}{dt} + \left\{ \begin{matrix} p \\ q r \end{matrix} \right\} A_r \frac{dx^q}{dt}$$

المتجهات A^p أو A_p يقال أنها تتحرك موازياً على طول المنحنى إذا كانت مشتقاتهم الذاتية على طول المنحنى تساوى صفراً ، على الترتيب .

المشتقات الذاتية لكميات ممتدة ذات مرتبة أعلى يمكن تعريفها بالتناقل .

كميات ممتدة مطلقة ونسبية : كمية ممتدة $A_{r_1 \dots r_n}^{p_1 \dots p_n}$ تسمى كمية ممتدة نسبية الوزن w إذا كانت مركبتها تتحول تبعاً للمعادلة

$$A_{\tilde{r}_1 \dots \tilde{r}_n}^{\tilde{p}_1 \dots \tilde{p}_n} = \left| \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right|^w A_{r_1 \dots r_n}^{p_1 \dots p_n} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \dots \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^n} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \dots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \quad (1)$$

حيث $J = \left| \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right|$ هو الجاكوبيان للتحويل . إذا كان $w = 0$ فإن الكمية الممتدة تسمى مطلقة ويكون هو من نوع الكمية الممتدة التي عرّفت سابقاً . إذا كانت $w = 1$ فإن الكمية الممتدة النسبية تسمى كثافة الكمية الممتدة . عمليات الجمع والغرب الخ ، الكميات الممتدة النسبية تكون مشابهة لتلك الكميات الممتدة المطلقة أنظر كتاب مسألة ٦٤ .

مسائل محلولة

اصطلاح التجميع :

١ - اكتب كلا من الآت مستخدماً اصطلاح التجميع

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x^N} dx^N, \quad \dots \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i \quad (1)$$

$$\frac{dx^h}{dt} = \frac{\partial x^h}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial x^h}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \dots + \frac{\partial x^h}{\partial x^N} \frac{dx^N}{dt}, \quad \frac{dx^h}{dt} = \frac{\partial x^h}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \quad (2)$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \dots + (x^N)^2, \quad x^h x^h \quad (3)$$

$$dx^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2, \quad dx^2 = g_{hh} dx^h dx^h, \quad N=3 \quad (4)$$

$$\sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^3 g_{pq} dx^p dx^q, \quad g_{pq} dx^p dx^q, \quad N=3 \quad (5)$$

٢ - اكتب المتود في كل من التجميعات الموضحة التالية

$$a_{jk} x^k, \quad \sum_{k=1}^N a_{jk} x^k = a_{j1} x^1 + a_{j2} x^2 + \dots + a_{jN} x^N \quad (1)$$

$$A_{pq} A^{qr}, \quad \sum_{q=1}^N A_{pq} A^{qr} = A_{p1} A^{1r} + A_{p2} A^{2r} + \dots + A_{pN} A^{Nr} \quad (2)$$

$$\bar{g}_{rs} = g_{jh} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^r} \frac{\partial x^h}{\partial \tilde{x}^s}, \quad N=3. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{rs} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \varepsilon_{jk}^r \frac{\partial x_j^k}{\partial z^r} \frac{\partial x^k}{\partial z^s} \\ &= \sum_{j=1}^n (\varepsilon_{j1}^r \frac{\partial x_j^1}{\partial z^r} \frac{\partial x^1}{\partial z^s} + \varepsilon_{j2}^r \frac{\partial x_j^2}{\partial z^r} \frac{\partial x^2}{\partial z^s} + \varepsilon_{j3}^r \frac{\partial x_j^3}{\partial z^r} \frac{\partial x^3}{\partial z^s}) \\ &= \varepsilon_{11}^r \frac{\partial x^1}{\partial z^r} \frac{\partial x^1}{\partial z^s} + \varepsilon_{21}^r \frac{\partial x^2}{\partial z^r} \frac{\partial x^1}{\partial z^s} + \varepsilon_{31}^r \frac{\partial x^3}{\partial z^r} \frac{\partial x^1}{\partial z^s} \\ &\quad + \varepsilon_{12}^r \frac{\partial x^1}{\partial z^r} \frac{\partial x^2}{\partial z^s} + \varepsilon_{22}^r \frac{\partial x^2}{\partial z^r} \frac{\partial x^2}{\partial z^s} + \varepsilon_{32}^r \frac{\partial x^3}{\partial z^r} \frac{\partial x^2}{\partial z^s} \\ &\quad + \varepsilon_{13}^r \frac{\partial x^1}{\partial z^r} \frac{\partial x^3}{\partial z^s} + \varepsilon_{23}^r \frac{\partial x^2}{\partial z^r} \frac{\partial x^3}{\partial z^s} + \varepsilon_{33}^r \frac{\partial x^3}{\partial z^r} \frac{\partial x^3}{\partial z^s} \end{aligned}$$

٧ - إذا كان $k = 1, 2, \dots, N$ ، x^k إحداثيات موحدة - ماضو الحل المتعصى إذا وجد - مثلة بكل من المعادلات الآتية لكل من $N=2, 3$ و $N \geq 4$. المرش أن للحوال فردية للقيمة ، لها مشتقات معكوسة ومشتقة ، عند الضرورة .

$$(أ) \quad x^k = 1 \text{ حيث } x^k \text{ مجموعة ثوابت}$$

$$\text{لقيمة } N=2, \quad x^1 + x^2 = 1 \text{ على قى ينعين ، لى على قى مستوى}$$

$$\begin{aligned} \text{لقيمة } N=3, \quad x^1 + x^2 + x^3 &= 1, \text{ مستوى فى ثلاثة أبعاد} \\ \text{لقيمة } N \geq 4, \quad x^1 + x^2 + \dots + x^N &= 1 \text{ يكون مستوى زائد} \end{aligned}$$

$$(ب) \quad x^k = 1$$

دائرة نصف قطرها الوحدة فى المستوى	$N=2, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1,$	لقيمة
كرة نصف قطرها الوحدة	$N=3, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$	لقيمة
كرة فوقية نصف قطرها الوحدة	$N \geq 4, \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^N)^2 = 1$	لقيمة

$$(ج) \quad x^k = x^k(u)$$

مستوى منحنى بيراميد	$N=2, \quad x^1 = x^1(u), \quad x^2 = x^2(u),$	لقيمة
منحنى فراغ ثلاثى الأبعاد	$N=3, \quad x^1 = x^1(u), \quad x^2 = x^2(u), \quad x^3 = x^3(u)$	لقيمة

$$\text{منحنى فراغ ذو } N \text{ من الأبعاد} \quad N \geq 4$$

$$(د) \quad x^k = x^k(u, v)$$

هو تحويل إحداثيات من (u, v) إلى (x^1, x^2)	$N=2, \quad x^1 = x^1(u, v), \quad x^2 = x^2(u, v)$	لقيمة
--	---	-------

القيمة $x^1 = x^1(u, v)$, $x^2 = x^2(u, v)$, $x^3 = x^3(u, v)$ لقيمة $N=3$ سطح ثلاث الأبعاد بإحداثيات u و v

لقيمة $N \geq 4$ سطح فوق

متجهات وكميات ممتدة متضادة الاختلاف ومتحدة الاختلاف :

٤ - أكتب قانون التحول للكميات المتعددة (١) A_{jk}^i (ب) B_{ijk}^{mn} (ج) C^m

$$A_{ijk}^p = \frac{\partial x^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^k}{\partial x^r} A_{jkr}^q \quad (1)$$

كاعدة لتذكر التحول ، لاحظ أن الرضع الثاني للأس p, q, r على الجانب اليسار للتحول هي نفسها كذلك الثاني على الجانب الأيمن حيث أن هذه الأسس مترافقة لإحداثيات x وحيث أن الأسس k, j, r تكون مترافقة على الترتيب p, q, r فإن التحول المطلوب يكون سهل كتابته .

$$B_{rst}^{pq} = \frac{\partial x^p}{\partial x^r} \frac{\partial x^q}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial x^t} \frac{\partial x^k}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x^m} B_{jkr}^{mn} \quad (ب)$$

$$C^p = \frac{\partial x^p}{\partial x^q} C^q \quad (ج)$$

٥ - كمية $A(j, k, l, m)$ التي هي دالة للإحداثيات ليست تحولت إلى نظام إحداثيات أخرى ليست دالة لقاعدة .

$$\tilde{A}(p, q, r, s) = \frac{\partial x^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^k}{\partial x^q} \frac{\partial x^l}{\partial x^r} \frac{\partial x^m}{\partial x^s} A(j, k, l, m)$$

(١) حل هذه الكمية معقدة ؟ (ب) إذا كانت كذلك ، أكتب الكمية المتعددة بتكوين واضح

(١) نم (ب) A_j^{km} (ج) متضادة الاختلاف من الرتبة 3 ، متحدة الاختلاف من الرتبة (١) والمرتبة

$$3 + 1 = 4$$

٦ - حدد أيًا من الكميات الآتية تكون كمية معقدة . إذا كانت كذلك المذكر ما إذا كانت متضادة الاختلاف أو متحدة الاختلاف وأعطى مرتبته :

$$\frac{\partial \phi(x^1, \dots, x^N)}{\partial x^k} \quad (ب) \quad (١) \quad x_{ij}^{kl}$$

(١) افترض تحويلات الإحداثيات $\tilde{x}^i(x^1, \dots, x^N) = x^i$ إذن $\tilde{x}^k = x^k$ و $\tilde{x}^j = x^j$ وكذلك \tilde{x}^i تكون كمية معقدة

متضادة الاختلاف من المرتبة واحد أو معقدة متضاد الاختلاف . تذكر أن وضع الأسس على يكون لائقاً .

(ب) تحت التحول $x^1, x^2, \dots, x^n = x^1, x^2, \dots, x^n$ تكون ϕ دالة في x^1, x^2, \dots, x^n وبالتالى ليس بحيث أن $x^1, x^2, \dots, x^n = \bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ أى أن ϕ تكون كمية عددية أو ثابتة (كمية متصلة من المرتبة صفر) .

بقانون السلسلة للتفاضل الجزئى $\frac{\partial \phi}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^k} = \dots = \frac{\partial \phi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x^k}$ و $\frac{\partial \phi}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^k} = \dots = \frac{\partial \phi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x^k}$. إذن $\frac{\partial \phi}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x^k} = \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial x^k} = \dots = \frac{\partial \phi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial x^k}$.
تذكر أن في $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ يظهر الأس في المقام ولذلك يفعل مثل رمز سفلى بين خواصه المتصلة الاختلاف .
نحن نشير إلى كمية متصلة $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ ومايكالها الكمية المنتجة بمركبات $\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$ ، كأنها أعداد لقيمة ϕ يكتب ϕ أو ϕ .

٧ - كمية متصلة متصلة الاختلاف لها مركبات x^1, x^2, \dots, x^n في الاحداثيات العمودية . أوجد مركباتها المتصلة الاختلاف في الاحداثيات الكروية .

ليكن r لرمز للمركبات المتصلة الاختلاف في الاحداثيات العمودية $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ إذن

$$A_1 = xy = x^1 x^2, \quad A_2 = zy - x^3 = 2x^2 - (x^3)^2, \quad A_3 = x^3 x^3$$

حيث يجب أن تؤخذ الحيلة لتمييز بين الرمز للسلل والأس

ليكن r لرمز للمركبات المتصلة الاختلاف في الاحداثيات الكروية $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$ إذن

$$\bar{A}_k = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} A_k \quad (1)$$

معادلات التحول بين نظم الاحداثيات هي

$$x^1 = \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3, \quad x^2 = \bar{x}^1 \sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3, \quad x^3 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2$$

إذن المعادلات (١) تعطي المركبات المتصلة الاختلاف المطلوبة

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\partial \phi}{\partial x^1} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} A_3 \\ &= (\sin \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3) (x^1 x^2) + (\sin \bar{x}^2 \sin \bar{x}^3) (2x^2 - (x^3)^2) + (\cos \bar{x}^2) (x^1 x^3) \\ &= (\sin \theta \cos \phi) (r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi) \\ &\quad + (\sin \theta \sin \phi) (2r \sin \theta \sin \phi - r^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad + (\cos \theta) (r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_\theta &= \frac{\partial \pi^1}{\partial \theta^2} A_1 + \frac{\partial \pi^2}{\partial \theta^2} A_2 + \frac{\partial \pi^3}{\partial \theta^2} A_3 \\ &= (r \cos \theta \cos \phi) (r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi) \\ &\quad + (r \cos \theta \sin \phi) (2r \sin \theta \sin \phi - r^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad + (-r \sin \theta) (r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_\phi &= \frac{\partial \pi^1}{\partial \theta^3} A_1 + \frac{\partial \pi^2}{\partial \theta^3} A_2 + \frac{\partial \pi^3}{\partial \theta^3} A_3 \\ &= (-r \sin \theta \sin \phi) (r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi) \\ &\quad + (r \sin \theta \cos \phi) (2r \sin \theta \sin \phi - r^2 \cos^2 \theta) \\ &\quad + (0) (r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi)\end{aligned}$$

٨- بين أن $\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta^2}$ لا تكون كمية متجهة حتى ولو كانت A_ϕ كمية متجهة متعددة الاختلاف من المراتبة واحد

من مقررنا ، $\bar{A}_\phi = \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta^2}$ فانحل بالنسبة للقيمة θ^2

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{A}_\phi}{\partial \theta^1} &= \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2 \partial \theta^1} \\ &= \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2 \partial \theta^1} \\ &= \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2 \partial \theta^1}\end{aligned}$$

حيث أن الحد الثاني من اليمين موجود فإن $\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta^1}$ لا تكون كما يجب للكمية المتعددة . اعبراً سدين كيف أن الجمع للكمية

متعددة المتعدد $\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta^1}$ تسبب أن تصبح النتيجة كمية متجهة (مسألة ٥٧)

٩- بين أن سرعة سائق حافلة تكون كمية متجهة متعددة الاختلاف من المراتبة واحد .

سرعة السائق مع كل نقطة في المركبات $\frac{\partial \theta^i}{\partial t}$ في نظام الإحداثيات θ^i في نظام الإحداثيات x تكون السرعة $\frac{\partial x^i}{\partial t}$

ليكن

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \frac{\partial \theta^j}{\partial t}$$

من قانون السلسلة ، وبالفعل فإن السرعة تكون كمية متجهة متعددة الاختلاف من الرتبة واحد أو متجهة متعددة الاختلاف .

$$\bar{f}_k^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^q}{\partial x^h} \delta_q^h$$

الطرف الأيمن يساوى $\delta_q^h = \delta_q^j$ من مسألة ١٢. حيث $\delta_q^j = \delta_q^j = 1$ إذا كان $j = k$ وصفر إذا كان $k \neq j$ وبالتالى فإن δ_q^h تكون كمية متجهة خطية من المرتبة الثانية ، مجردا للرمز المستعمل .

تذكر أننا نستعمل فى بعض الأحيان $1 = q = p$ إذا كان $p = q$ وصفر إذا كان $p \neq q$ بحيث p مثل الكرونة ، ولنا . هذا يكون على أى حال ليس كمية متجهة متصلة الاختلاف من المرتبة الثانية كما قد يظهره القرمز .

عمليات أساسية بالكميات المبنية :

١٥- إذا كان A_r^{pq} , B_r^{pq} كميات متجهة ، أثبت أن مجموعها والفرق بينها يكون كميات متجهة .

من القرض A_r^{pq} و B_r^{pq} تكون كميات متجهة ، بحيث أن

$$\bar{A}_i^{jh} = \frac{\partial f^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^h}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^i} A_r^{pq}$$

$$\bar{B}_i^{jh} = \frac{\partial f^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^h}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^i} B_r^{pq}$$

$$(\bar{A}_i^{jh} + \bar{B}_i^{jh}) = \frac{\partial f^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^h}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^i} (A_r^{pq} + B_r^{pq}) \text{ بالجمع}$$

$$(\bar{A}_i^{jh} - \bar{B}_i^{jh}) = \frac{\partial f^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^h}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^i} (A_r^{pq} - B_r^{pq}) \text{ بالطرح}$$

إذن $A_r^{pq} - B_r^{pq}$ و $A_r^{pq} + B_r^{pq}$ كميات متجهة لها نفس المرتبة والنوع مثل A_r^{pq} و B_r^{pq}

١٦- إذا كان A_r^{pq} و B_r^{pq} كميات متجهة . أثبت أن $A_r^{pq} B_r^{pq} = C_{r\epsilon}^{pq\epsilon}$ تكون أيضا كمية متجهة .

يجب أن نثبت أن $C_{r\epsilon}^{pq\epsilon}$ تكون كمية متجهة مركبتها كونت بأعلى حاصل القرب لمركبات .

الكميات المتجهة A_r^{pq} و B_r^{pq} . حيث B_r^{pq} تكون كميات متجهة

$$\bar{A}_i^{jh} = \frac{\partial f^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^h}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^i} A_r^{pq}$$

$$\bar{B}_i^{pq} = \frac{\partial x^q}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial x^u} B_t^s$$

$$\bar{A}_i^{jh} \bar{B}_n^{pq} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} A_r^{pq} B_s^{st}$$

التي تبين أن $A_r^{pq} B_s^{st}$ كمية ممتدة من المرتبة 0 ، بأسي متضادة الاختلاف p, q, s وأسس متعددة الاختلاف r, t وهذا مضمون الزمر C_{rst}^{pqs} . ننسى $A_r^{pq} B_s^{st} = C_{rst}^{pqs}$ حاصل الضرب الخارجي لكتبة A_r^{pq} و B_s^{st} .

١٧- ليكن A_{rst}^{pq} كمية ممتدة (١) اختار $p = t$ وبين أن A_{rqp}^{pq} يكون كمية ممتدة عند استخدام اصطلاح التجميع ، ماهي مرتبتها ؟

(ب) اختر $p = t$ و $q = s$ وبالمثل بين أن A_{rqp}^{pq} تكون كمية ممتدة . وهي مرتبتها .

(١) حيث A_{rsp}^{pq} تكون كمية ممتدة .

$$(١) \quad \bar{A}_{lmn}^{jkh} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^n} A_{rst}^{pq}$$

يجب أن تبين أن A_{rsp}^{pq} تكون كمية ممتدة . ضع الأسس المناظرة j و n تساوى كل منهما الأخرى وأجمع على هذا الأس . إذن

$$\begin{aligned} \bar{A}_{lmf}^{jkh} &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^f} A_{rst}^{pq} \\ &= \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m} A_{rst}^{pq} \\ &= \delta_p^t \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} A_{rst}^{pq} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} A_{rsp}^{pq} \end{aligned}$$

وأیضا A_{rsp}^{pq} يكون كمية ممتدة من المرتبة ٣ ويمكن أن. توضح بالرمز B_{rs}^q عملية وضع الأس المتضاد الاختلاف تساوى الأس المتحد الاختلاف في كمية ممتدة ثم الجمع تسمى انكماش (تقلص) . يمثل هذه العملية لأن كمية ممتدة تكون قد كونت ومرتبتها تقل من مرتبة الكمية الممتدة الأصلية بالثلاثين .

(ب) يجب أن تبين أن A_{rqp}^{pq} هي كمية ممتدة . ضع $j = n$ و $k = m$ في معادلة (١) الجزء (١) وأجمع على j و k لدينا .

$$\begin{aligned} \bar{A}_{lmf}^{jkh} &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^f} A_{rst}^{pq} \\ &= \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l} A_{rst}^{pq} \end{aligned}$$

$$= \delta_p^q \delta_q^r \frac{\partial \pi^r}{\partial \pi^l} A_{rqs}^p$$

$$= \frac{\partial \pi^r}{\partial \pi^l} A_{rqs}^p$$

التي تبين أن A_{rqs}^p هي كمية ممتدة من المرتبة واحدة ويمكن أن يرمز لها C_r . تذكر أنه بالانكماش مرتين . تكون المرتبة قد خفضت بمقدار ٤

١٨ - أثبت أن الانكماش لكتبة ممتدة A_q^p تكون كمية ممتدة أو ثابتة

$$\bar{A}_h^j = \frac{\partial \pi^j}{\partial \pi^p} \frac{\partial \pi^q}{\partial \pi^h} A_q^p$$

لدينا

$$\bar{A}_j^j = \frac{\partial \pi^j}{\partial \pi^p} \frac{\partial \pi^q}{\partial \pi^j} A_q^p = \delta_p^q A_q^p = A_p^p$$

إذن $\bar{A}_j^j = A_p^p$. وبالتالي فإن A_p^p يجب أن يكون ثابتا حيث A_q^p تكون كمية ممتدة من المرتبة اثنين وانكماش بالنسبة إلى أي أس منفرد يخفص الرتبة باثنين يقودنا ذلك إلى تعريف الثابت ككتبة ممتدة من المرتبة صفر .

١٩ - بين أن الانكماش لحاصل الضرب الخارجي لكتبة ممتدة A^p و B_q تكون ثابتة .

$$\text{حيث } A^p \text{ و } B_q \text{ تكون كميات ممتدة } \bar{A}_h^j = \frac{\partial \pi^j}{\partial \pi^p} A^p, \bar{B}_h = \frac{\partial \pi^q}{\partial \pi^h} B_q$$

$$\bar{A}_h^j \bar{B}_h = \frac{\partial \pi^j}{\partial \pi^p} \frac{\partial \pi^q}{\partial \pi^h} A^p B_q$$

بالانكماش (ضع $k = j$ واجمع)

$$\bar{A}_j^j \bar{B}_j = \frac{\partial \pi^j}{\partial \pi^p} \frac{\partial \pi^q}{\partial \pi^j} A^p B_q = \delta_p^q A^p B_q = A^p B_p$$

وهكذا $A^p B_p$ تكون ثابتة . عملية ضرب الكميات الممتدة (ضرب خارجي) ثم انكماش تسمى ضربا داخليا وتسمى

النتيجة حاصل ضرب داخلي . حيث $A^p B_p$ كمية ممتدة وتسمى عادة حاصل الضرب الداخلي للمتجهات A^p و B_q

٢٠ - بين أن أي حاصل الضرب الداخلي للكميات الممتدة B_q^{rs} و A_r^p تكون كمية ممتدة من المرتبة الثالثة .

$$\text{حاصل ضرب خارجي للكتبة } B_q^{rs} \text{ و } A_r^p = A_r^p B_q^{rs}$$

ليكن الانكاش بالنسبة للأوس p و i ، أي أن ليكن $p = i$ واجمع . يجب أن نبين أن نتيجة حاصل الضرب الداخلي ، يمثل بواسطة A_p^{qs} ويكون كمية ممتدة

من المرتبة الثالثة من القوس A_p^q و B_i^{qs} هي كميات ممتدة إذن

$$\bar{A}_k^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} A_r^p, \quad \bar{B}_n^{lm} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^n} B_t^s$$

بالضرب ، ليكن $n = j$ والجمع نجد أن

$$\begin{aligned} \bar{A}_k^j \bar{B}_j^{lm} &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^j} A_r^p B_t^s \\ &= \delta_p^t \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} A_r^p B_t^s \\ &= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} A_r^p B_p^{qs} \end{aligned}$$

يبين أن A_p^{qs} هي كمية ممتدة من المرتبة الثالثة . بالانكاش باللعبة إلى q و r أو s و r في حاصل الضرب بالمثل يمكن أن نبين أن أي حاصل ضرب داخلي يكون كمية ممتدة من المرتبة الثالثة .

طريقة أخرى : حاصل الضرب الخارجي لكتبتين ممتدتين يكون كمية ممتدة مرتبة حاصل جمع مرتبات الكميات الممتدة المطاة . إذن $A_p^{qs} B_p^{qs}$ كمية ممتدة من المرتبة $5 = 2 + 3$. حيث ناتج الانكاش يكون كمية ممتدة مرتبتها أقل من مرتبة اللعبة المستدة المطاة بالثنتين وبالتالي فإن أي انكاش لقيمة $A_p^{qs} B_p^{qs}$ تكون كمية ممتدة من المرتبة $5 - 2 = 3$

٢١- إذا كان $X(p, q, r)$ كمية بحيث أن $X(p, q, r) B_r^{qn} = 0$ لأي كمية ممتدة اختيارية B_r^{qn} ، أثبت أن $X(p, q, r) = 0$ تكون متطابقة .

حيث B_p^{qn} هي كمية ممتدة اختيارية ، اضم مركبة واحدة خاصة (مثلا مركبة بترقيم $q = 2, r = 3$) لا تساوي صفرا ، بينما كل المركبات الأخرى تساوي صفرا . إذن $X(p, 2, 3) B_3^{qn} = 0$. بحيث أن $X(p, 2, 3) = 0$ حيث $B_3^{qn} \neq 0$. بأسباب مشابه لكل التوافيق الممكنة لقيمة q و r لدينا $X(p, q, r) = 0$ ومنها نتوصل على النتيجة .

٢٢- كمية $A(p, q, r)$ بحيث تكون في نظام احداث $C_p^s = A(p, q, r) B_r^{qs}$ ، حيث B_r^{qs} تكون كمية ممتدة اختيارية و C_p^s كمية ممتدة . اثبت أن $A(p, q, r)$ تكون كمية ممتدة .

$$\bar{x}_k^i \bar{A}(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x}) \bar{B}_i^{hm} = \bar{C}_j^m$$

$$\bar{A}(j, k, l) \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^i} B_r^{qs} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} C_p^{st} = \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} A(p, q, r) B_r^{qs} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s} \left[\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} A(p, q, r) \right] B_r^{qs} = 0 \quad \text{أو}$$

ضرب داخل بواسطة $\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial \bar{x}^i}$ (أي ضرب المقدار $\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial \bar{x}^i}$ ثم انكاش القيمة $i = m$) ينتج :

$$\delta_s^n \left[\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} A(p, q, r) \right] B_r^{qs} = 0$$

$$\left[\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} A(p, q, r) \right] B_r^{qn} = 0 \quad \text{أو}$$

حيث B_r^{qn} كمية متعة اعتيادية ولديها من المسألة ٢١ ،

$$\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} A(p, q, r) = 0$$

ضرب داخل بواسطة $\frac{\partial \bar{x}^q}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial \bar{x}^r}$ ينتج

$$\delta_m^h \delta_s^n \bar{A}(j, k, l) - \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial \bar{x}^r} A(p, q, r) = 0$$

$$\bar{A}(j, m, n) = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^q}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial \bar{x}^r} A(p, q, r) \quad \text{أو}$$

لقد تبين أن $A(p, q, r)$ تكون كمية متعة ويوزر استخدام الرمز A_{pq}^r

في هذه المسألة تكون قد أنشأنا حالة خاصة لقانون خارج القسمة التي تنص على أنه إذا كان حاصل الضرب الداخلي لـ X كمية متعة اعتيادية B يكون كمية متعة C إذن X تكون كمية متعة

الكيفيات المتعة المتماثلة والاختلافات المتماثل :

٢٢- إذا كانت الكمية المتعة A_{34}^{pq} متماثلة (متخالفة المتماثل) بالنسبة إلى الأسس p و q في نظام إحداثي واحد ، بين أنها تبقى متماثلة (متخالفة المتماثل) بالنسبة إلى p و q في أي نظام إحداثي حيث الأسس p و q متضمنة فقط متجهات التجهيز القيمة A_{pq}

إذا كان B_{pq} متماثل ، $B_{pq} = B^{pq}$ إذن

$$\bar{B}^h = \frac{\partial \bar{z}^h}{\partial z^q} \frac{\partial z^h}{\partial z^q} B^{qg} = \frac{\partial \bar{z}^h}{\partial z^q} \frac{\partial z^h}{\partial z^q} B^{qg} = \bar{B}^h$$

و B^{qg} تبقى متائلة في نظام إحداثي جديد

إذا كان B^{qg} تكون متخالفة المتائل $B^{qg} = -B^{gq}$ ، إذن

$$\bar{B}^h = \frac{\partial \bar{z}^h}{\partial z^q} \frac{\partial z^h}{\partial z^q} B^{qg} = - \frac{\partial \bar{z}^h}{\partial z^q} \frac{\partial z^h}{\partial z^q} B^{qg} = -\bar{B}^h$$

و B^{qg} تبقى متخالفة المتائل في نظام إحداثي جديد

النتائج السابقة ، بالطبع ، صالحة للكميات المستدة المتائلة (متخالفة المتائل) الأخرى .

٢٤- بين أن كل كمية مستدة يمكن التعبير عنها ك مجموع كيتين مستقلتين ، احدهما متائلة والأخرى متخالفة المتائل في زوج من الأسس المتضادة الاختلاف والمتضمنة الاختلاف .

اعتبر مثال ، الكمية المستدة B^{qg} ، نجهد أن

$$B^{qg} = \frac{1}{2}(B^{qg} + B^{gq}) + \frac{1}{2}(B^{qg} - B^{gq})$$

لكن $R^{qg} = \frac{1}{2}(B^{qg} + B^{gq})$ تكون متائلة ، و $S^{qg} = \frac{1}{2}(B^{qg} - B^{gq})$ تكون متخالفة المتائل . بأسباب مشابهة فإن النتيجة تظهر أنها حقيقية لأي كمية مستدة .

٢٥- إذا كان $\Phi = a_{jh} A^j A^h$ ، بين أنه يمكننا أن نكتب دائما $\Phi = b_{jh} A^j A^h$ حيث b_{jh} تكون متائلة

$$\Phi = a_{jh} A^j A^h = a_{jh} A^h A^j = a_{jh} A^j A^h$$

$$2\Phi = a_{jh} A^j A^h + a_{jh} A^h A^j = (a_{jh} + a_{jh}) A^j A^h$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(a_{jh} + a_{jh}) A^j A^h = b_{jh} A^j A^h$$

حيث $b_{jh} = \frac{1}{2}(a_{jh} + a_{jh})$ تكون متائلة .

المصغوفات :

٢٦- أكتب حاصل الجع $S = A + B$ ، لفرق $D = A - B$ وحاصل القرب $P = AB, Q = BA$ المصغوفات

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = A+B = \begin{pmatrix} 3+2 & 1+0 & -2-1 \\ 4-4 & -2+1 & 3+2 \\ -2+1 & 1-1 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = A-B = \begin{pmatrix} 3-2 & 1-0 & -2+1 \\ 4+4 & -2-1 & 3-2 \\ -2-1 & 1+1 & -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = AB = \begin{pmatrix} (3)(2) + (1)(-4) + (-2)(1) & (3)(0) + (1)(1) + (-2)(-1) & (3)(-1) + (1)(2) + (-2)(0) \\ (4)(2) + (-2)(-4) + (3)(1) & (4)(0) + (-2)(1) + (3)(-1) & (4)(-1) + (-2)(2) + (3)(0) \\ (-2)(2) + (1)(-4) + (-1)(1) & (-2)(0) + (1)(1) + (-1)(-1) & (-2)(-1) + (1)(2) + (-1)(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 19 & -5 & -6 \\ -9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q = BA = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ -13 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

هذا يعني أن $AB \neq BA$ ، أي أن حاصل ضرب المصفوفات لا يكون تبادلياً بصفة عامة .

٢٧ - إذا كان $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ، فإن $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 14 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{إذن} \quad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن}$$

حيث أن $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ مع العلم $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

٢٨ - عبر عن معادلات التحول في صيغة المصفوفات لما يأتي (١) معطى متجه الاختلاف (٢) كمية طاقة متضادة

الاختلاف من المرتبة التالية ، بفرض $N=3$

$$(١) \text{ معادلات التحول } A_q = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} \quad \text{يمكن أن نكتب}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^1}{\partial x^1} & \frac{\partial^2}{\partial x^1} & \frac{\partial^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial^1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^1}{\partial x^3} & \frac{\partial^2}{\partial x^3} & \frac{\partial^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

بدلالة أعداد المتجهات أو ما يعادلها بدلالة صفوف المتجهات .

$$(\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2 \quad \bar{A}_3) = (A_1 \ A_2 \ A_3) \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{pmatrix}$$

(ب) معادلات التحول $A^{qr} = \frac{\partial x^q}{\partial x'^r} A^{pq}$ يمكن أن تكون

$$\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

يمكن جعل هذه النتائج سارية لقيم $N > 3$ ، لكيات المتجه في المراتب العليا ولأن صيغة المعجلات لا تصلح .

عنصر الخط والكمية الممتدة المترية :

٢٤ - إذا كان $ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k$ كمية ثابتة ، بين أن g_{jk} تكون كمية متعلقة بمتعلقة المعادلة الاختلاف من المرتبة الثانية .

من المسألة ٢٠ ، $t_{بد} = t_{بد}^0$ ، $\Phi = dx^0$ ، و $A^h = dx^h$ يتبع ذلك أن $g_{\mu\nu}$ يمكن اختيارها متجانسة. أيضا حيث يكون dx^2 ثابتة.

$$\varepsilon_{pq} dx^p dx^q = \varepsilon_{jk} dx^j dx^k = \varepsilon_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^p} dx^p \frac{\partial x^k}{\partial x^q} dx^q = \varepsilon_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^k}{\partial x^q} dx^p dx^q$$

إذن $\bar{g}_{pq} = g_{\bar{p}\bar{q}} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^q}$ و g_{jk} تكون كمية متجهة متحدة الاختلاف من المرتبة الثانية، تسمى كمية متجهة مترية.

٣٥ - أوجد الكمية المعتدلة المترية في (١) الأحداثيات الأسطوانية و (ب) الأحداثيات الكروية .

$$dx^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad , \quad \text{الفصل السابع} \quad , \quad (1) \text{ كما في المسألة } v$$

$$\text{إذا كان } x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = z \text{ then } g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1, g_{12} = g_{21} = 0, g_{23} = g_{32} = 0, g_{31} = g_{13} = 0$$

في صيغة المصفوفات الكمية المستعملة المترية يمكن أن نكتب

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dx^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad \text{الفصل السابع} \quad (1) \quad , \quad \text{كما في المسألة } A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{إذا كان } x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi \quad \text{الكمية المعتمدة المترية يمكن أن نكتب}$$

عوضا للاحداثيات المتصلة $g_{jk} = 0$ إذا كان $k \neq j$

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad (1) \text{ عبر عن المحدد} \quad g \quad \text{بدلالة العناصر التي في الصف الثاني وما يانظرها من المعاملات.}$$

$$(ب) \text{ بين أن } g = G(j, k) \text{ حيث } G(j, k) \text{ هي معامل الكمية } g_{jk} \text{ في } g \text{ حيث لتجميع على } k \text{ فقط}$$

$$(1) \text{ المعامل لقيمة } g_{jk} \text{ هو المحدد الذي حصلنا عليه من } g \text{ بواسطة (1) حذف الصف والعمود التي تظهر فيه } g_{jk} \text{ و } g_{jj} \text{ و (2) اجعل العلاقة } j+k \text{ (—) توافيق هذا المحدد.}$$

$$g_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}, \text{ المعامل لقيمة } g_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$g_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \text{ المعامل لقيمة}$$

$$\text{ارمز هذه المعاملات بواسطة } G(2,1), G(2,2) \text{ and } G(2,3) \text{ على التوالي.}$$

إذاً من المبادئ الأولية المحددات .

$$g_{21} G(2,1) + g_{22} G(2,2) + g_{23} G(2,3) = g$$

(ب) يطبق النتيجة التي في (١) على أي صف أو عمود ، لدينا $G(j, k) = g_{jk}$ حيث يكون التجميع على ثم k

فقط . هذه النتائج تسمى حيث $g = |g_{jk}|$ يكون محدد من الرتبة الثانية

$$g_{21} G(3, 1) + g_{22} G(3, 2) + g_{23} G(3, 3) = 0 \quad (١)$$

$$g_{2h} G(p, k) = 0 \text{ if } p \neq p$$

(١) اعتبر المحدد
$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$
 الذي يساوى صفراً حيث أن الصفين الآخرين يكونان متطابقين .
بالفلك هما لمتامير الصف الأخير لدينا

$$g_{21} G(3, 1) + g_{22} G(3, 2) + g_{23} G(3, 3) = 0$$

(ب) بوضع العناصر المناظرة لأي صفين (أو عمودين) متساوية يمكن أن نبين كما في الجزء (١) أن $g_{jh} G(p, k) = 0$ إذا p يتغير هذه النتيجة تسمى كذلك المعطيات التي من الرتبة الثانية .

$$٣٣- \text{عريف} \quad g^{jk} = \frac{G(j, k)}{g} \text{ حيث } G(j, k) \text{ هو معامل القيمة } g_{jk} \text{ في المحدد } g = |g_{jk}| \neq 0$$

$$\text{أثبت أن} \quad g_{jh} g^{hk} = g_j^k$$

من المسألة ٣١ ، $g_{jh} g^{hk} = 1$ أو $\frac{G(j, h)}{g} = 1$ حيث يكون التجميع على k فقط

من المسألة ٣٢ ، $g_{jh} g^{hk} = 0$ أو $\frac{G(p, h)}{g} = 0$ إذا كان j يتغير p

$$\text{إذن } g_j^j = 1 \text{ (إذا كان } j = p \text{ ، وصفر إذا كان } j \text{ يتغير } p)$$

استخدمنا الرمز g^{jk} ولو لم نبين به مسوغاً لهذا الرمز . أي أن g^{jk} تكون الكمية المستعدة المضادة للاختلاف من المرتبة الثانية . تحقق ذلك في المسألة ٣٤ . تذكر أن المعامل يكتب على الصورة $G(j, k)$ وليس G^{jk} حيث يمكن أن نبين أنه ليس كمية مستعدة بالمعنى العام . مع أن ، يمكن أن نبين أنه كمية مستعدة نسبياً بوزن C التي تكون متضادة الاختلاف ، بهذا التوسع في مبدأ الكمية المستعدة فإن الرمز G^{jk} يمكن تسميته (أنظر المسائل المتنوعة مسألة رقم ١٥٢) .

٣٤- أثبت أن g^{jk} تكون كمية مستعدة متباينة متضادة الاختلاف من المرتبة الثانية .

$$\text{حيث } g_{jk} \text{ تكون متباينة ، } G(j, k) \text{ تكون متباينة وهكذا } g^{jk} = G(j, k)/g \text{ تكون متباينة .}$$

إذا كان BP متجهها متضاد الاختلاف اختصارياً $B_p q = g_{pq}$ يكون متجهها متضاد الاختلاف اختصارياً .

بالضرب في g^{pq}

$$g^{pq} B_p q = B^q \quad \text{أو} \quad g^{pq} B_p q = B^q \quad \text{أو} \quad g^{pq} B_p q = B^q$$

حيث B_g يكون متجهها اختياريًا ، g تكون كمية ممتدة متضادة الاختلاف من المرتبة الثانية ، بتطبيق قانون خارج التفاضل . التكملة الممتدة g تسمى التكملة الممتدة المترتبة المرافقة .

٣٥- أوجد التكملة الممتدة المترتبة المرافقة في (١) الأعداديات الأبطالية و (ب) الاحداثيات الكروية .

(١) من (المسألة ٣٠)

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho^2$$

$$g^{11} = \frac{\text{cofactor of } g_{11}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{22} = \frac{\text{cofactor of } g_{22}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33} = \frac{\text{cofactor of } g_{33}}{g} = \frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = 1$$

$$g^{23} = \frac{\text{cofactor of } g_{23}}{g} = -\frac{1}{\rho^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بالمثل $g^{31} = 0$ إذا كان g يتحيز في صيغة المصفوفة التكملة الممتدة المترتبة المرافقة يمكن أن نعمل بالآتي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = \rho^4 \sin^2 \theta \quad (\text{ب) من (المسألة ٣٠)}$$

كما في الجزء (١) نجد $g^{11} = 1$, $g^{22} = \frac{1}{\rho^2}$, $g^{33} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta}$ وفي صيغة المصفوفة

يمكن أن تكتب في الصورة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

٣٦- أوجد (١) g و (ب) g^{jk} المناظرة لكمة $ds^2 = 5(dx^1)^2 + 3(dx^2)^2 + 4(dx^3)^2 - 8 dx^1 dx^2 + 4 dx^2 dx^3$

$$g = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{إذن} \quad g_{11}=5, g_{22}=3, g_{33}=4, g_{12}=g_{21}=-3, g_{23}=g_{32}=2, g_{13}=g_{31}=0 \quad (١)$$

(ب) للماتر $G(j, k)$ القيمة g_{jk} يكون

$$G(1,1)=8, \quad G(2,2)=20, \quad G(3,3)=6, \quad G(1,2)=G(2,1)=12, \quad G(2,3)=G(3,2)=-10, \quad G(1,3)=G(3,1)=-6$$

$$\text{إذن } g^{11}=2, \quad g^{22}=5, \quad g^{33}=3/2, \quad g^{12}=g^{21}=3, \quad g^{23}=g^{32}=-5/2, \quad g^{13}=g^{31}=-3/2$$

لذا نذكر أن حاصل ضرب المصفوفات (g_{jk}) و (g^{jk}) تكون هي وحدة المصفوفة 1 أي أن

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 \\ -6 & 20 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ 3 & 5 & -5/2 \\ -3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الكميات المبددة المترافقة :

$$A^h = g^{hj} A_j \quad \text{بين أن} \quad A_j = g_{jh} A^h$$

$$A_j = g_{jh} A^h \quad \text{بالضرب} \quad g^{jq}$$

$$\text{إذن} \quad g^{jq} A_j = g^{jq} g_{jh} A^h = \delta_h^q A^h = A^q, \quad \text{ل.ع.} \quad A^q = g^{jq} A_j \quad \text{أو} \quad A^h = g^{hq} A_q$$

الكميات المبددة من المرتبة واحدة ، A_j و A^k تسمى مترافقة وهي تمثل مركبات المتجه المتضاد الاختلاف والمتعدد الاختلاف .

$$L^2 = g^{pq} A_p A_q \quad \text{(ب) يمكن ثابتا} \quad L^2 = g_{pq} A^p A^q \quad \text{(أ) بين أن}$$

(1) ليكن A_j و A^k هي مركبات المتجه المتضاد الاختلاف والمتعدد الاختلاف .

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^j}{\partial x^p} A_j, \quad \bar{A}^q = \frac{\partial x^q}{\partial x^h} A^h \quad \text{إذن}$$

$$\bar{A}_p \bar{A}^q = \frac{\partial x^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^h} A_j A^h = \delta_h^q A_j A^h = A_j A^j$$

بحيث أن $A_j A^j$ تكون عبارة من ثابت التي سنبينها L^2 إذن يمكن أن نكتب

$$L^2 = A_j A^j = g_{jh} A^h A^j = g_{pq} A^p A^q$$

$$L^2 = A_j A^j = A_j g^{jk} A_k = g^{jk} A_j A_k = g^{pq} A_p A_q \quad (ب) \text{ من (١)}$$

الكمية الممتدة أو الثابتة $L = \sqrt{A^p A_p}$ تسمى مقدار أو طول المتجه له المركبات المتعددة الاختلاف A_p والمركبات المتعددة الاختلاف A^p .

٢٩- (١) إذا كانت A_p و B^q متجهيات ، فإن AB تكون ثابتة .

$$(ب) \text{ فإن أن } \frac{g_{pq} A^p B^q}{\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}} \text{ تكون ثابتة}$$

(١) من المسألة ٢٨ ، $g_{pq} A^p B^q = g_{pq} A^p B^q$ ، تكون ثابتة .

$$(ب) \text{ حيث } AB \text{ و } A_p \text{ و } B_q \text{ تكون ثوابت } \sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)} \text{ تكون ثابتة وكذلك } \frac{g_{pq} A^p B^q}{\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}}$$

تكون ثابتة .

نعم لمصرف

$$\cos \theta = \frac{g_{pq} A^p B^q}{\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}}$$

كجيب تمام الزاوية بين المتجهين AB و A^p ، إذا $A^p B_p = g_{pq} A^p B^q$ المتجهيات تسمى متعامدة .

٣٠- مبرهن العلاقة بين الكميات الممتدة المترافقة .

$$A_{p,q..t}^{p..rs..} \text{ and } A_{j,qk}^{...sl..} \quad A_{j..l}^{..h} \text{ and } A^{qhr} \quad (ب) \quad A^{jhl} \text{ and } A_{pqr} \quad (١)$$

$$A_{pqr} = g_{jp} g_{hq} g_{lr} A^{jhl} \text{ أو } A^{jhl} = g^{jp} g^{hq} g^{lr} A_{pqr} \quad (١)$$

$$A^{qhr} = g^{jq} g^{lr} A_{j..l}^{..h} \text{ أو } A_{j..l}^{..h} = g_{jq} g_{lr} A^{qhr} \quad (ب)$$

$$A_{j,qk}^{...sl..} = g_{pj} g_{rk} g_{t..l}^{..p..rs..} A_{q..t}^{p..rs..} \text{ أو } A_{q..t}^{p..rs..} = g^{pj} g^{rk} g^{t..l}^{..p..rs..} A_{j,qk}^{...sl..} \quad (ج)$$

٤١- أثبت أن الزوايا θ_{21} ، θ_{12} ، θ_{23} بين أحداق المتجهات في نظام إحداثيات الأبعاد الثلاثة تعطى بالعلاقة

$$\cos \theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} , \quad \cos \theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22} g_{33}}} , \quad \cos \theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33} g_{11}}}$$

على طول اعدادى المنحنى (x^2) ، $x^2 =$ كمية ثابتة و $x^3 =$ كمية ثابتة

$$\text{إذن من الصيغة المتقاربة} \quad \frac{dx^2}{dx} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \quad \text{أو} \quad \frac{dx^2}{dx} = g_{11}(dx^2)^2$$

لذلك فإن متجه وحدة المماس على طول المنحنى x^2 يكون: $A_1^x = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \delta_1^x$ ، بالمثل ، متجهات

$$\text{وحدة المماس على طول اعدادى المنحنيات} \quad x^2 \text{ و } x^3 \text{ تكون} \quad A_2^x = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \delta_2^x \quad \text{و} \quad A_3^x = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \delta_3^x$$

يجب تمام الزاوية θ_{21} بين A_2^x و A_1^x تعطى بالمعادلة

$$\cos \theta_{21} = g_{pq} A_1^p A_2^q = g_{pq} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \delta_1^p \delta_2^q = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$$

بالمثل يمكن أن نحصل على النتائج الأخرى .

$$42 - \text{أثبت أن نظام اعدادى معتمد يكون} \quad g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0$$

ينتج ذلك مباشرة من المسألة ١١ بوضع $\theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{31} = 90^\circ$ من الخاتمة أن $g_{pq} = g_{qp}$ ينتج

$$\text{أيضا أن} \quad g_{21} = g_{32} = g_{13} = 0.$$

$$43 - \text{أثبت أن نظام اعدادى معتمد يكون} \quad g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

$$\text{من المسألة ٣٣} \quad g^{pq} g_{pq} = \delta_q^p$$

$$\text{إذا كان } p=q=1, \quad g^{1p} g_{p1} = 1 \quad \text{أي} \quad g^{11} g_{11} + g^{22} g_{21} + g^{33} g_{31} = 1$$

$$\text{إذن باستخدام المسألة ٤٢} \quad g_{11} = \frac{1}{g^{11}}$$

$$\text{بالمثل إذا} \quad p=q=2, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}} \quad \text{وإذا} \quad p=q=3, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}$$

رموز كريستوفيل :

$$[pq, r] = g_{rs} \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} \quad (\alpha) \quad \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} s \\ qp \end{matrix} \right\} \quad (\beta) \quad [pq, r] = [qp, r] \quad (1) \quad \text{أثبت (١)}$$

$$[pq, r] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \right) = [qp, r] \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = g^{sr} [pq, r] = g^{sr} [qp, r] = \left\{ \begin{matrix} s \\ qp \end{matrix} \right\} \quad (\beta)$$

$$g_{hs} \left\{ \frac{s}{pq} \right\} = g_{hs} g^{sr} [pq, r] = g_{hs}^r [pq, r] = [pq, k] \quad (٦)$$

$$[pq, k] = g_{hs} \left\{ \frac{s}{pq} \right\} \quad \text{لـ} s, \quad [pq, r] = g_{rs} \left\{ \frac{s}{pq} \right\} \quad \text{أو}$$

تذكر أن ضرب $[pq, r]$ في g^{sr} لها تأثير تبديل r بالقيمة s ، وضع هذا الأس واهمال الأفراس المربطة بالقواس مزدوجة لينتج $\left\{ \frac{s}{pq} \right\}$ بالمثل ، ضرب $\left\{ \frac{s}{pq} \right\}$ في g_{rs} أو g لها تأثير اسفل s محل r ، غطس هذا الأس وتبديل الأفراس المزدوجة بالقواس مربعة لينتج $[pq, r]$

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^a} = [pm, q] + [qm, p] \quad (١) \quad - qo$$

$$\left\{ \frac{p}{pq} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^q} \ln \sqrt{g} \quad (-) \quad \frac{\partial g^{pq}}{\partial x^a} = -g^{pn} \left\{ \frac{q}{mn} \right\} - g^{qn} \left\{ \frac{p}{mn} \right\} \quad (ب)$$

$$[pm, q] + [qm, p] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^p} \right) = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^a} \quad (١)$$

$$\text{بأن} \quad \frac{\partial}{\partial x^a} (g^{jh} g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^a} (\delta_i^h) = 0 \quad (ب)$$

$$g_{ij} \frac{\partial g^{jh}}{\partial x^a} = -g^{jh} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a} \quad \text{أو} \quad g^{jh} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a} + \frac{\partial g^{jh}}{\partial x^a} g_{ij} = 0$$

$$\text{بالضرب في} \quad g^{ir} \quad g^{ir} g_{ij} \frac{\partial g^{jh}}{\partial x^a} = -g^{ir} g^{jh} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a}$$

$$\text{أي أن} \quad \delta_j^r \frac{\partial g^{jh}}{\partial x^a} = -g^{ir} g^{jh} ([im, j] + [jm, i])$$

$$\frac{\partial g^{rh}}{\partial x^a} = -g^{ir} \left\{ \frac{k}{im} \right\} - g^{jh} \left\{ \frac{r}{jm} \right\} \quad \text{أو}$$

والنتيجة تأتي باسفل k, i, r محل حل القريب p, q, m, n

(٦) من المسألة ٢١ ، $G(j, k)$ على g اجمع على قيم $(k \text{ فقط})$.

$$\text{حيث } G(j, k) \text{ لا تحتوي على } g \text{ صريحة } G(j, i) = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}} \quad \text{بأن} \quad \text{الاجمع على } k \text{ و } r$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^m} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_{jr}^m} \frac{\partial x_{jr}}{\partial x^m} = G(j, r) \frac{\partial x_{jr}}{\partial x^m} \\
 &= \varepsilon \varepsilon^{jr} \frac{\partial x_{jr}}{\partial x^m} = \varepsilon \varepsilon^{jr} ([jm, r] + [rm, j]) \\
 &= \varepsilon \left(\left\{ \frac{j}{jm} \right\} + \left\{ \frac{r}{rm} \right\} \right) = 2\varepsilon \left\{ \frac{j}{jm} \right\}
 \end{aligned}$$

لذلك

$$\frac{1}{2\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^m} = \left\{ \frac{j}{jm} \right\} \text{ أو } \left\{ \frac{j}{jm} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \sqrt{\varepsilon}$$

النتيجة تأتي بإحلال j محل p وكذلك q محل r

٤٦ - اشتق قوانين التحويل لرموز كريستوفيل الثلاث (١) النوع الأول .

(ب) النوع الثاني

$$\bar{g}_{jk} = \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} g_{pq} \quad (1) \quad \text{حيث}$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial x^m} = \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} \frac{\partial x^r}{\partial x^m} + \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^q}{\partial x^m \partial x^k} g_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^m \partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} g_{pq} \quad (1)$$

بالتفاضل التفاضل للأضراس m و k و j و p

$$\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial x^r}{\partial x^m} \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial x^m} + \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^j \partial x^m} g_{qr} + \frac{\partial^2 x^q}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^r}{\partial x^m} g_{qr} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial x^k} \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^m} \frac{\partial x^q}{\partial x^m} + \frac{\partial x^r}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^k \partial x^m} g_{rp} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial x^p}{\partial x^m} g_{rp} \quad (3)$$

المراح (١) من حاصل جمع (٢) و (٣) والاضرب في $\frac{1}{2}$ ، نحصل بالمعادلة تعريف
رموز كريستوفيل من النوع الأول حل

$$[\bar{j}k, m] = \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial x^r}{\partial x^m} [pq, r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^q}{\partial x^m} g_{pq} \quad (4)$$

(ب) احرب (٤) في $\frac{\partial x^n}{\partial x^s} \frac{\partial x^m}{\partial x^t} g^{st}$ لنحصل على

$$\begin{aligned}\overline{g^{nm}}[jk, m] &= \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial x^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \frac{\partial x^m}{\partial x^t} g^{st}[pq, r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^q}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \frac{\partial x^m}{\partial x^t} g^{st} g_{pq} \\ \left\{ \frac{n}{jk} \right\} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \delta_t^r g^{st}[pq, r] + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^q}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \delta_t^r g^{st} g_{pq} \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \left\{ s \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \delta_t^r g^{st} g_{pq}\end{aligned}$$

إذن

حيث $\delta_t^r g^{st} g_{pq, r} = g^{sr}[pq, r] = \left\{ s \right\}_{pq}$ and $\delta_t^r g^{st} g_{pq} = g^{sq} g_{pq} = \delta_p^s$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^j \partial x^k} &= \left\{ \frac{n}{jk} \right\} \frac{\partial x^n}{\partial x^m} - \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \left\{ pq \right\} \quad \text{٤٧- أثبت} \\ \left\{ \frac{n}{jk} \right\} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \left\{ s \right\}_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial x^n}{\partial x^s} \delta_t^r g^{st} g_{pq} \quad \text{من المسألة ٤٦ (ب)} \\ \frac{\partial x^n}{\partial x^m} \cdot \left\{ \frac{n}{jk} \right\} \frac{\partial x^m}{\partial x^s} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \delta_p^s \left\{ s \right\}_{pq} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^j \partial x^k} \delta_p^s \delta_t^r g^{st} g_{pq} \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \left\{ pq \right\} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^j \partial x^k} \delta_p^s\end{aligned}$$

حل الكمية $\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^j \partial x^k}$ ، نحصل على النتيجة

٤٨- احسب رموز كريستوفيل لائق (١) النوع الأول (ب) النوع الثاني ، الفراخ حيث $g_{pq} = 0$ إذا كان q مختلف p

$$[pq, r] = [pp, p] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} \quad p = q = r \text{ إذا كان}$$

$$[pq, r] = [pp, r] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r} \quad p = q \text{ مختلف } r$$

$$[pq, r] = [pq, p] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} \quad p \neq r \text{ مختلف } p$$

إذا كان p, q, r متباعدة فإن $[pq, r] = 0$

لم يستخدم هنا اصطلاح التجميع

(ب) من المسألة ٤٣ ، $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y}$ ، إذن

$$r = s = 0, \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = g^{32} [pq, r] = 0 \text{ if } r \neq s, \text{ and } = g^{33} [pq, s] = \frac{[pq, s]}{g_{33}}$$

من (١)

$$p = q = s, \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} p \\ pp \end{matrix} \right\} = \frac{[pp, p]}{g_{pp}} = \frac{1}{2g_{pp}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^p} \ln g_{pp} \quad \text{إذا كان}$$

$$p = q \neq s, \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} s \\ pp \end{matrix} \right\} = \frac{[pp, s]}{g_{ss}} = -\frac{1}{2g_{ss}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^s} \quad \text{إذا كان}$$

$$p = s \neq q, \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} p \\ pq \end{matrix} \right\} = \frac{[pq, p]}{g_{pp}} = \frac{1}{2g_{pp}} \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^q} \ln g_{pp} \quad \text{إذا كان}$$

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{إذا كان } p, q, s \text{ متباعدة ، فإن}$$

٤٤ - من رموز كريستوفل من النوع الثاني في (١) الأضدادات المزدوجة (ب) الأضدادات الأسطوانية (ج) الأضدادات الكروية .

يمكننا استخدام نتائج المسألة ٤٨ ، حيث يكون للأضدادات المتعددة $g_{pq} = 0$ إذا كان q غير p

$$\left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} = 0, \text{ بحيث أن } g_{pp} = 1 \text{ في الأضدادات المزدوجة ،}$$

(ب) في الأضدادات الأسطوانية ، $x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = z$ لدينا من المسألة ٣٠ (١) ، $g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = 1$ ،
رموز كريستوفل الوحيدة التي ليست صفرية تكون من النوع الثاني يمكن أن تحدث حيث $p = 2$ هذه تكون

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) = -\rho,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) = \frac{1}{\rho}$$

(ج) في الأضدادات الكروية ، $x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = \theta$

لدينا من المسألة ٣٠ (ب) ، $g_{11} = 1, g_{22} = \rho^2, g_{33} = \rho^2 \sin^2 \theta$ ،
رموز كريستوفل الوحيدة التي ليست صفرية من النوع الثاني يمكن أن تحدث حيث 3 أو 2 $p = 2$ هذه تكون

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = -r \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{1}{r} \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin^2 \theta) = -r \sin^2 \theta \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r} \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin^2 \theta) = \cot \theta\end{aligned}$$

جبريدسيات (المساحة التطبيقية)

٥٠- أثبت أن الشرط اللازم لكي يكون $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt$ طرف نهاية (النهاية الكبرى أو نهاية صغرى)

$$\text{أن يكون } \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

ليكن المنحنى الذي يحصل I طرف نهاية هو $x = X(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ إذن $x = X(t) + \epsilon \eta(t)$

حيث ϵ لا يمتد على t ، يكون منحنى محاور خلال t_1 و t_2 بحيث أن $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ قيمة I المتغير المحاور تكون

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, X + \epsilon \eta, \dot{X} + \epsilon \dot{\eta}) dt$$

هذا يكون طرف نهاية لقيمة $\epsilon = 0$ ، الشرط اللازم لكي يكون لهذا طرف نهاية هو أن $\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$. لكن بالتفاضل تحت علامة التكامل ، مقترضا صلاحية .

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) dt = 0$$

التي يمكن أن تكتب كالآتي

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial x} \eta dt + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt = 0$$

حيث أن η اختيارية ، للتكاملية $\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$

النتيجة يمكن استخدامها بسهولة لتشكل $F(t, x^1, x^2, x^3, \dots, x^p, x^q, x^r)$ في

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} \right) = 0$$

نفس معادلات أيلر أو لاگرانج (أنظر أيضاً مسألة ٧٣).

$$\frac{d^2 x^r}{dt^2} + \left\{ r \right\} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = 0$$

يجب أن نعين طرف النهاية للقيمة $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq}} \dot{x}^p \dot{x}^q dt$ باستخدام معادلات أيلر (مسألة ٥٠) مع

$$F = \sqrt{g_{pq}} \dot{x}^p \dot{x}^q$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{2} (g_{pq} \dot{x}^p \dot{x}^q)^{-1/2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2} (g_{pq} \dot{x}^p \dot{x}^q)^{-1/2} 2g_{pk} \dot{x}^q$$

باستخدام يمكن كتابة معادلات أيلر $\frac{dx}{dt} = \sqrt{g_{pq}} \dot{x}^p \dot{x}^q$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g_{pk} \dot{x}^p}{\dot{x}} \right) - \frac{1}{2\dot{x}} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q = 0$$

$$g_{pk} \ddot{x}^p + \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} \dot{x}^p \dot{x}^q - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \dot{x}^p \dot{x}^q = \frac{g_{pk} \dot{x}^p \ddot{x}^q}{\dot{x}}$$

$$\text{يمكن كتابته } \frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} \dot{x}^p \dot{x}^q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qk}}{\partial x^p} \right) \dot{x}^p \dot{x}^q$$

$$g_{pk} \ddot{x}^p + [pq, k] \dot{x}^p \dot{x}^q = \frac{g_{pk} \dot{x}^p \ddot{x}^q}{\dot{x}}$$

إذا استخدمنا طرق القوس كبراهيم ، $\dot{x} = 1, \ddot{x} = 0$ والمعادلة تصبح

$$g_{pk} \frac{d^2 x^p}{ds^2} + [pq, k] \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

بالضرب في \dot{x} ، نحصل على

$$\frac{d^2 x^r}{ds^2} + \left\{ r \right\} \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0$$

المسألة الثالثة الاختلاف :

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} A_s \quad (1) \quad \text{حيث } A_p \text{ و } A_q \text{ كميات متجهة من الرتبة } (1)$$

تكون كميات متجهة

$$A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} p \\ qs \end{matrix} \right\} A^s$$

$$\bar{A}_j = \frac{\partial x^r}{\partial x^j} A_r \quad (1) \quad \text{حيث}$$

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x^j} \frac{\partial A_r}{\partial x^k} \frac{\partial x^s}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x^j \partial x^k} A_r \quad (1)$$

من المسألة ١٧

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^j \partial x^k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^r}{\partial x^n} - \frac{\partial x^t}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} r \\ il \end{matrix} \right\}$$

بالتمويض في (١)

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x^j} \frac{\partial x^t}{\partial x^k} \frac{\partial A_r}{\partial x^t} + \left\{ \begin{matrix} n \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^r}{\partial x^n} A_r - \frac{\partial x^t}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} r \\ il \end{matrix} \right\} A_r$$

$$= \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \frac{\partial A_p}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} n \\ jk \end{matrix} \right\} \bar{A}_n - \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} A_s$$

أو

$$\frac{\partial \bar{A}_j}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} n \\ jk \end{matrix} \right\} \bar{A}_n = \frac{\partial x^p}{\partial x^j} \frac{\partial x^q}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} A_s \right)$$

والمعادلة $\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ pq \end{matrix} \right\} A_s$ تكون كمية متجهة متجهة الاختلاف من المرتبة الثانية تسمى المنطقة متجهةالاختلاف للمسألة A_p بالنسبة إلى A_q وتكتب A_{pq}

$$\bar{A}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^r} A^r \quad (ب) \quad \text{حيث}$$

$$\frac{\partial \bar{A}^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^j}{\partial x^r} \frac{\partial A^r}{\partial x^k} \frac{\partial x^t}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^r \partial x^k} \frac{\partial x^t}{\partial x^k} A^r \quad (٢)$$

من المسألة ١٧ ، بإبدال الأحداثيات x و \bar{x}

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^r \partial x^k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ rk \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^j}{\partial x^n} - \frac{\partial x^t}{\partial x^r} \frac{\partial x^l}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} j \\ tl \end{matrix} \right\}$$

بالنموذج في (٢)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A^j}{\partial x^h} &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \frac{\partial A^r}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^i}{\partial x^h} A^r - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^h} \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} A^r \\
 &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \frac{\partial A^r}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^i}{\partial x^h} A^r - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \delta_{ik}^j \left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\} A^r \\
 &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^h} A^p - \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} A^i
 \end{aligned}$$

أو

$$\frac{\partial A^j}{\partial x^h} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} A^i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^i}{\partial x^h} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} A^p \right)$$

ونذكر الماداة $\frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} A^q$ كمية متجهة مغلقة من المرتبة الثانية ، تسمى المنطقة مصفوفة الاختلاف

لكمية المتجهة AP بالنسبة إلى x^q وتكتب AP_{qj}

$$\begin{aligned}
 A_{hj}^j (\gamma) \quad A_{jh}^h (\beta) \quad A_{jh}^i (1) \quad \text{لكل من الكميات المتجهة الآتية} \\
 A_{mn}^{jhl} (\alpha) \quad A_{hl}^j (\alpha)
 \end{aligned}$$

$$A_{jh,q}^i = \frac{\partial A_{jh}^i}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ i \end{matrix} \right\} A_{jh}^s - \left\{ \begin{matrix} s \\ q \end{matrix} \right\} A_{jh}^i \quad (1)$$

$$A_{h,q}^{jh} = \frac{\partial A_{h,q}^{jh}}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} j \\ q \end{matrix} \right\} A_{h,q}^{js} + \left\{ \begin{matrix} s \\ q \end{matrix} \right\} A_{h,q}^{js} \quad (2)$$

$$A_{h,q}^j = \frac{\partial A_{h,q}^j}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ q \end{matrix} \right\} A_{h,q}^s + \left\{ \begin{matrix} i \\ q \end{matrix} \right\} A_{h,q}^i \quad (3)$$

$$A_{hl,q}^j = \frac{\partial A_{hl,q}^j}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ q \end{matrix} \right\} A_{hl,q}^s - \left\{ \begin{matrix} s \\ i \end{matrix} \right\} A_{hl,q}^s + \left\{ \begin{matrix} i \\ q \end{matrix} \right\} A_{hl,q}^i \quad (4)$$

(٥)

$$A_{mn,q}^{jhl} = \frac{\partial A_{mn,q}^{jhl}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ q \end{matrix} \right\} A_{mn,q}^{jhl} - \left\{ \begin{matrix} s \\ q \end{matrix} \right\} A_{mn,q}^{jhl} + \left\{ \begin{matrix} i \\ q \end{matrix} \right\} A_{mn,q}^{jhl} + \left\{ \begin{matrix} h \\ q \end{matrix} \right\} A_{mn,q}^{jhl} + \left\{ \begin{matrix} l \\ q \end{matrix} \right\} A_{mn,q}^{jhl}$$

٥٤ - أثبت أن المعادلات المتجهة الاختلاف لكل من (1) E_{jh} (ب) E_{jh}^j (ج) E_{jh}^j تكون لا صفراً

$$g_{jk,q} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ jq \end{matrix} \right\} g_{sk} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} g_{js} \quad (1)$$

$$\text{باستخدام المسألة ٤ (أ)} \quad = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^q} - [jq, k] - [kq, j] = 0$$

$$\text{(ب)} \quad g^{jk}_{,q} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} i \\ qs \end{matrix} \right\} g^{sk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qs \end{matrix} \right\} g^{js} = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$g^j_{h,q} = \frac{\partial g^j_h}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ hq \end{matrix} \right\} g^j_s + \left\{ \begin{matrix} i \\ qs \end{matrix} \right\} g^s_h = 0 - \left\{ \begin{matrix} i \\ hq \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ qh \end{matrix} \right\} = 0 \quad (٢)$$

٥٥- أوجد المشتقة متجهة الاختلاف الكمية بالنسبة إلى x^q

$$\begin{aligned} (A^j_h B^{lm}_n)_{,q} &= \frac{\partial (A^j_h B^{lm}_n)}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ hq \end{matrix} \right\} A^j_s B^{lm}_n - \left\{ \begin{matrix} s \\ nq \end{matrix} \right\} A^j_h B^{lm}_s \\ &\quad + \left\{ \begin{matrix} i \\ qs \end{matrix} \right\} A^i_h B^{lm}_n + \left\{ \begin{matrix} i \\ qs \end{matrix} \right\} A^j_h B^{im}_n + \left\{ \begin{matrix} m \\ qs \end{matrix} \right\} A^j_h B^{ls}_n \\ &= \left(\frac{\partial A^j_h}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ hq \end{matrix} \right\} A^j_s + \left\{ \begin{matrix} i \\ qs \end{matrix} \right\} A^i_h \right) B^{lm}_n \\ &\quad + A^j_h \left(\frac{\partial B^{lm}_n}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ nq \end{matrix} \right\} B^{lm}_s + \left\{ \begin{matrix} i \\ qs \end{matrix} \right\} B^{im}_n + \left\{ \begin{matrix} m \\ qs \end{matrix} \right\} B^{ls}_n \right) \\ &= A^j_{h,q} B^{lm}_n + A^j_h B^{lm}_{n,q} \end{aligned}$$

هذا يوضح الحقيقة أن المشتقات المتجهة الاختلاف لحاصل ضرب الكميات المتعددة يتطابق لقوانين مثل القوانين العادية

للمشتقات الضرب في مبادئ حساب التفاضل والتكامل .

$$(g_{jh} A^{lm}_n)_{,q} = g_{jh} A^{lm}_{n,q}$$

$$(g_{jh} A^{lm}_n)_{,q} = g_{jh,q} A^{lm}_n + g_{jh} A^{lm}_{n,q} = g_{jh} A^{lm}_{n,q}$$

٥٦- أثبت

حيث $g_{jk,q} = 0$ من المسألة ٥٤ (١) . في تقلل الكميات المتعددة $g_{jk,q}$ و g^j_h يمكن جعلها كتوابت

الانحدار ، التباعد والانتقال في صيغ كميات ممتدة :

$$\text{div } A^b = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{g} A^b) \quad \text{٥٧- أثبت أن}$$

التباعد لـ A^b هو الانكماش للمشتقة المتجهة الاختلاف لـ A^b أى أن الانكماش لـ A^b و $A^b_{,p}$ ،
إذن ، باستخدام المسألة ٤٥ (ج)

$$\begin{aligned} \text{div } A^b &= A^b_{,p} = \frac{\partial A^b}{\partial x^b} + \left\{ \begin{matrix} p \\ b \end{matrix} \right\} A^b \\ &= \frac{\partial A^b}{\partial x^b} + \left(\frac{\partial}{\partial x^b} \ln \sqrt{g} \right) A^b = \frac{\partial A^b}{\partial x^b} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^b} \right) A^b = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{g} A^b) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{g} g^{br} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}) \quad \text{٥٨- أثبت أن}$$

الانحدار لـ Φ هو $\nabla^2 \Phi = \text{grad } \Phi$ كمية ممتدة الاختلاف من المرتبة واحد (أنظر مسألة ١ (ب))
معرفة على أنها المشتقة المتجهة الاختلاف لـ Φ وتكتب على الصورة $\Phi_{,r}$. الكمية الممتدة متعادلة الاختلاف من

المرتبة واحد متعلقة مع $\Phi_{,r}$ هى $A^b = g^{br} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}$. إذن من المسألة ٥٧

$$\nabla^2 \Phi = \text{div} \left(g^{br} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{g} g^{br} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r})$$

$$A_{b,q} - A_{q,b} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p} \quad \text{٥٩- أثبت أن}$$

$$A_{p,q} - A_{q,p} = \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\} A_s \right) - \left(\frac{\partial A_q}{\partial x^p} - \left\{ \begin{matrix} q \\ p \end{matrix} \right\} A_s \right) = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \frac{\partial A_q}{\partial x^p}$$

هذه الكمية الممتدة من المرتبة اثنين تعرف على أنها الانتقال لـ A_p

٦٠- عبر عن التباعد المتجه A^b بدلالة مركباته لـ Φ يالتي (١) الأحداثيات الأسطوانية (ب) الأحداثيات الكروية

$$(١) : \text{أحداثيات الأسطوانية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \phi, x^3 = z$$

$$(٢) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٣) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٤) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٥) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٦) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٧) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٨) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٩) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٠) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١١) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٢) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٣) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٤) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٥) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٦) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٧) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٨) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(١٩) : \text{أحداثيات القطبية} \quad x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

$$(٢٠) : \text{أحداثيات الكروية} \quad x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$$

المركبات القيزي يائية ، هي $A\rho, A\phi, Az$ تحلى بالمعادلات

$$A\rho = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1, \quad A\phi = \sqrt{g_{22}} A^2 = \rho A^2, \quad Az = \sqrt{g_{33}} A^3 = A^3$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A^{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k) \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_{\rho}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (A_{\phi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_z) \right] \end{aligned} \quad \text{إذن}$$

(ب) الإحداثيات الكروية $x^1=r, x^2=\theta, x^3=\phi$

$$\sqrt{g} = r^2 \sin \theta \quad \text{و} \quad g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = r^4 \sin^2 \theta$$

(أنظر مسألة ٢٠ (٧))

المركبات القيزي يائية وهي $A_r, A_{\theta}, A_{\phi}$ تحلى بالمعادلات

$$A_r = \sqrt{g_{11}} A^1 = A^1, \quad A_{\theta} = \sqrt{g_{22}} A^2 = r A^2, \quad A_{\phi} = \sqrt{g_{33}} A^3 = r \sin \theta A^3$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A^{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (r A_{\phi}) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} \end{aligned} \quad \text{إذن}$$

٦١- جبر من اللاإبسية لكميات $\otimes, \nabla^2 \otimes$ في (أ) الإحداثيات الأسطوانية (ب) الإحداثيات الكروية

(أ) في الإحداثيات الأسطوانية $\varepsilon^{11}=1, \varepsilon^{22}=1/\rho^2, \varepsilon^{33}=1$ (أنظر مسألة ٣٥ (أ)).

إذن من المسألة ٥٨

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{kr} \frac{\partial \Phi}{\partial x^r}) \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

(ب) في الإحداثيات الكروية $g^{11} = 1, g^{22} = 1/r^2, g^{33} = 1/r^2 \sin^2 \theta$ (أنظر مسألة ٣٥ (ب)). إذن

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{kk} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

المشتقات الثلاثية :

٦٧- بحسب المشتقات الثلاثية لكل من الكميات المعطاة الآتية ، بفرض أنها دوال قابلة للتفاضل في (١) التابث

$$A_{lmn}^{jh}(\lambda), A_h^j(\tau), A^j(\rho)$$

$$\text{المشتقات العادية} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \Phi_{,q} \frac{dx^q}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^q} \frac{dx^q}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta A^j}{\delta s} &= A_{,q}^j \frac{dx^q}{ds} = \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^q} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^s \right) \frac{dx^q}{ds} = \frac{\partial A^j}{\partial x^q} \frac{dx^q}{ds} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^s \frac{dx^q}{ds} \\ &= \frac{dA^j}{ds} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A^s \frac{dx^q}{ds} \quad (ب) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta A_h^j}{\delta s} &= A_{h,q}^j \frac{dx^q}{ds} = \left(\frac{\partial A_h^j}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ hq \end{matrix} \right\} A_s^j + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_h^s \right) \frac{dx^q}{ds} \\ &= \frac{dA_h^j}{ds} - \left\{ \begin{matrix} s \\ hq \end{matrix} \right\} A_s^j \frac{dx^q}{ds} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_h^s \frac{dx^q}{ds} \quad (ج) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta A_{lmn}^{jh}}{\delta s} &= A_{lmn,q}^{jh} \frac{dx^q}{ds} = \left(\frac{\partial A_{lmn}^{jh}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ lq \end{matrix} \right\} A_{smn}^{jh} - \left\{ \begin{matrix} s \\ mq \end{matrix} \right\} A_{lsn}^{jh} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \begin{matrix} s \\ nq \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{jh} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{sh} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{js} \right) \frac{dx^q}{ds} \\ &= \frac{dA_{lmn}^{jh}}{ds} - \left\{ \begin{matrix} s \\ lq \end{matrix} \right\} A_{smn}^{jh} \frac{dx^q}{ds} - \left\{ \begin{matrix} s \\ mq \end{matrix} \right\} A_{lsn}^{jh} \frac{dx^q}{ds} - \left\{ \begin{matrix} s \\ nq \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{jh} \frac{dx^q}{ds} \\ &\quad + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{sh} \frac{dx^q}{ds} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{js} \frac{dx^q}{ds} \quad (د) \end{aligned}$$

٩٧- أثبت المشتقات التالية للكميات \bar{g}_h^j و \bar{g}_{jh}^j تكون صفر

$$\text{من المسألة ٩٤} \quad \frac{\partial \bar{g}_{jh}^j}{\partial t} = (\bar{g}_{jh}^j) \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad \frac{\partial \bar{g}_h^j}{\partial t} = \bar{g}_{jh}^j \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad \frac{\partial \bar{g}_h^j}{\partial t} = \bar{g}_{jh}^j \frac{dx^j}{dt} = 0$$

الكميات المتعددة النسبية :

٩٨- إذا كان \bar{A}_q^p و \bar{B}_q^p كميات متعددة نسبية لما الأوزان w_1 و w_2 على الترتيب ، بين أن حاصل ضربهما الداخلي والخارجي تكون كميات متعددة نسبية لما الوزن $w_1 + w_2$

$$\text{من الفرض} \quad \bar{A}_h^j = w_1 \frac{\partial \bar{A}^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^q}{\partial x^h} \bar{A}_q^p, \quad \bar{B}_h^j = w_2 \frac{\partial \bar{B}^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^q}{\partial x^h} \bar{B}_q^p$$

$$\bar{A}_h^j \bar{B}_h^j = w_1 + w_2 \frac{\partial \bar{A}^j}{\partial x^h} \frac{\partial \bar{B}^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^q}{\partial x^h} \bar{A}_q^p \bar{B}_q^p$$

كمية متعددة نسبية لما الوزن $w_1 + w_2$. لئى حاصل ضرب داخلي ، فلي هو التفاضل حاصل الضرب الخارجي ، يكون أيضاً كمية متعددة نسبية لما الوزن $w_1 + w_2$

٩٩- أثبت أن \sqrt{g} يكون كمية متعددة نسبية لما الوزن واحد ، أى أن كثافة الكمية المتعددة .

$$\text{عناصر المحدد } g \text{ المخططة بواسطة } g_{pq} \text{ تتحول تبعاً لـ} \quad \bar{g}_{jh}^j = \frac{\partial \bar{g}^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^q}{\partial x^h} \bar{g}_{qh}^j$$

$$\sqrt{g} = \sqrt{g} \quad \text{أو} \quad \bar{g} = \left| \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^h} \right| \left| \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^h} \right| g = J^2 g = \sqrt{g}$$

لئى تبين أن \sqrt{g} تكون كمية متعددة نسبية لما الوزن واحد .

١٠٠- أثبت أن $dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n$ تكون ثابتاً

$$(\text{من المسألة ٩٩}) \quad d\bar{V} = \sqrt{\bar{g}} d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 \dots d\bar{x}^n = \sqrt{g} / dx^1 dx^2 \dots dx^n = \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

$$= \sqrt{g} \left| \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^h} \right| dx^1 dx^2 \dots dx^n = \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n = dV$$

من هذه المعادلات يتأتى أن . إذا كانت \oplus ثابتاً ، إذن

$$\int_V \dots \int \bar{g} d\bar{V} = \int_V \dots \int g dV$$

لئى تظم أحداث حيث يكون التكامل قد أجرى على الحجم في فراغ أبعاد N . يمكن عمل فرض مماثل لتكامل السطح .

تطبيقات مختلفة :

١٠١- معر في صيغة الكميات المتعددة من (أ) السرعة . و (ب) المساحة الجسم

(أ) إذا تحرك الجسم على طول منحنى $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ حيث t تكون براميتر الزمن ، إذن $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ تكون سرعتها وهي كمية متجهة متضادة للاختلاف من المرتبة واحد . (أنظر مسألة ٩) .

(ب) للكمية $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ عموماً ليست كمية متجهة وبالتالي لا يمكن أن تمثل الكمية الفيزيائية المبجلة في كل نظم الإحداثيات . نعرف المبجلة \vec{a} على أنها المشتقة الثلاثية للسرعة أى أن $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. فلي هي كمية متجهة متضادة للاختلاف من المرتبة واحد .

٦٨- أكتب قانون نيوتن في صيغة كمية متجهة :

افترض أن كتلة الجسم M هي ثابت لا يعتمد على الزمن t . إذن $M\vec{a} = \vec{F}$ تكون كمية متجهة متضادة للاختلاف من المرتبة واحد ونسب القوة على الجسم . لذلك يمكن كتابة قانون نيوتن في الصورة

$$\vec{F} = M\vec{a} = M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} \right\} \vec{j} + \left\{ \frac{d^2z}{dt^2} \right\} \vec{k} \quad ٦٩- أثبت أن$$

حيث \vec{v} تكون كمية متجهة متضادة للاختلاف ، لدينا من المسألة ٦٢ (ب)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \left\{ \frac{dv_x}{dt} \right\} \vec{i} + \left\{ \frac{dv_y}{dt} \right\} \vec{j} + \left\{ \frac{dv_z}{dt} \right\} \vec{k} \\ &= \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \right\} \vec{i} + \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} \right\} \vec{j} + \left\{ \frac{d^2z}{dt^2} \right\} \vec{k} \end{aligned}$$

٧٠- أوجد المركبات الفيزيائية لكل من (أ) السرعة (ب) المبجلة لجسم في الأحداثيات الأسطوانية .

(أ) من المسألة ٦٧ (أ) ، المركبات المتضادة للاختلاف للسرعة هي

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$$

إذن المركبات الفيزيائية للسرعة هي

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z \quad \text{حيث} \quad v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{e}_r = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}, \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}, \quad \vec{e}_z = \vec{k}$$

(ب) من المسألة ٦٩ و ٤٩ (ب) المركبات المتضادة للاختلاف للمبجلة هي

$$\begin{aligned}
 a^1 &= \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^2}{dt} = \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\
 a^2 &= \frac{d^2 x^2}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} = \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \frac{d\phi}{dt} \\
 a^3 &= \frac{d^2 x^3}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}
 \end{aligned}$$

إذاً المركبات الفيزيائية المعجلة هي

$$\sqrt{g_{11}} a^1 = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2, \quad \sqrt{g_{22}} a^2 = \rho \ddot{\phi} + 2 \dot{\rho} \dot{\phi}, \quad \text{و} \quad \sqrt{g_{33}} a^3 = \ddot{z}$$

حيث تدل النقاط على التفاضلات بالنسبة للزمن .

٧١- إذا كانت طاقة الحركة T لجسم M كتلة ثابتة M يتحرك بسرعة مقدارها v تحلى بالمعادلة \dot{z}^2 $\dot{z}^2 = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M g_{pq} \dot{z}^p \dot{z}^q$ أثبت أن

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}^h} \right) - \frac{\partial T}{\partial z^h} = M a_h$$

حيث تدل a_h على المركبات المتجهة للاختلاف المعجلة

$$\text{حيث } T = \frac{1}{2} M g_{pq} \dot{z}^p \dot{z}^q \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}^h} \right) = M (g_{hq} \ddot{z}^q + \frac{\partial g_{hq}}{\partial x^j} \dot{z}^j \dot{z}^q), \quad \frac{\partial T}{\partial z^h} = \frac{1}{2} M \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^h} \dot{z}^p \dot{z}^q, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}^h} = M g_{hq} \dot{z}^q$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}^h} \right) - \frac{\partial T}{\partial z^h} &= M \left(g_{hq} \ddot{z}^q + \frac{\partial g_{hq}}{\partial x^j} \dot{z}^j \dot{z}^q - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^h} \dot{z}^p \dot{z}^q \right) \quad \text{إذاً} \\
 &= M \left(g_{hq} \ddot{z}^q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{hq}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{ph}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^h} \right) \dot{z}^p \dot{z}^q \right) \\
 &= M (g_{hq} \ddot{z}^q + [pq, h] \dot{z}^p \dot{z}^q) \\
 &= M g_{hr} \left(\ddot{z}^r + \left\{ \begin{matrix} r \\ pq \end{matrix} \right\} \dot{z}^p \dot{z}^q \right) = M g_{hr} a^r = M a_h
 \end{aligned}$$

استطاعنا أن نبرهن عن النظرية في صيغة الكمية المتصلة ، وبما يكون ذلك صحيحا لكل نظم الاحتمالات حيث أنها تكون صحيحة للنظم المتعددة (أنظر الباب السادس) . أنظر أيضا المبدأ ٦٦ .

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} (\rho) \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho (\rho) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

في صيغة كمية متصلة .

عرف الكميات للمتصلة $\mathbf{E}^h, \mathbf{D}^h, \mathbf{E}_h, \mathbf{H}_h, \mathbf{j}^h$ وأفرض أن ρ و σ تكون ثوابت . إذن يمكن كتابة المعادلات

$$\mathbf{B}_{,h}^h = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{D}_{,h}^h = 4\pi \rho \quad (2)$$

$$-e^{jhq} \mathbf{E}_{h,q} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^j}{\partial t} \quad \text{أو} \quad e^{jhq} \mathbf{E}_{h,q} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^j}{\partial t} \quad (3)$$

$$-e^{jhq} \mathbf{H}_{h,q} = \frac{4\pi \mathbf{j}^j}{c} \quad \text{أو} \quad e^{jhq} \mathbf{H}_{h,q} = -\frac{4\pi \mathbf{j}^j}{c} \quad (4)$$

هذه المعادلات تكون الأساس للنظرية الكهرومغناطيسية

٧٦ - (١) أثبت أن $A_{pq,r} - A_{pqr} = R_{pqr}^n A_n$ حيث A_p كمية متصلة اختيارية متصلة الاختلاف من المرتبة واحد

(٢) أثبت أن R_{pqr}^n تكون كمية متصلة (٣) أثبت $R_{pqr}^n = \epsilon_{nrs} R_{pqr}^s$ تكون كمية متصلة .

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{pqr}^h &= (A_{h,q})_{,r} = \frac{\partial A_{h,q}}{\partial x^r} - \left\{ \begin{matrix} j \\ pr \end{matrix} \right\} A_{j,q} - \left\{ \begin{matrix} i \\ qr \end{matrix} \right\} A_{h,i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} j \\ pq \end{matrix} \right\} A_j \right) - \left\{ \begin{matrix} j \\ pr \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} k \\ jq \end{matrix} \right\} A_k \right) - \left\{ \begin{matrix} i \\ qr \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^i} - \left\{ \begin{matrix} l \\ pi \end{matrix} \right\} A_l \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_p}{\partial x^r \partial x^q} + \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ \begin{matrix} j \\ pq \end{matrix} \right\} A_j - \left\{ \begin{matrix} j \\ pr \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_j}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} i \\ pr \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} i \\ pr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ jq \end{matrix} \right\} A_k \\ &\quad - \left\{ \begin{matrix} j \\ qr \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_p}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ qr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l \\ pi \end{matrix} \right\} A_l \end{aligned}$$

بإعداد q و r والطرح ، نجد

$$\begin{aligned} A_{pqr} - A_{p,rq} &= \left\{ \begin{matrix} i \\ pr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ iq \end{matrix} \right\} A_h - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ \begin{matrix} i \\ pq \end{matrix} \right\} A_j - \left\{ \begin{matrix} i \\ pq \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k \\ jr \end{matrix} \right\} A_h + \frac{\partial}{\partial x^q} \left\{ \begin{matrix} i \\ pr \end{matrix} \right\} A_j \\ &= \left\{ \begin{matrix} k \\ pr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ iq \end{matrix} \right\} A_j - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ \begin{matrix} i \\ pq \end{matrix} \right\} A_j - \left\{ \begin{matrix} k \\ pq \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ jr \end{matrix} \right\} A_j + \frac{\partial}{\partial x^q} \left\{ \begin{matrix} i \\ pr \end{matrix} \right\} A_j \\ &= R_{pqr}^j A_j \end{aligned}$$

$$R_{pqr}^j = \left\{ \begin{matrix} k \\ pr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ iq \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^r} \left\{ \begin{matrix} i \\ pq \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} k \\ pq \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ jr \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^q} \left\{ \begin{matrix} i \\ pr \end{matrix} \right\}$$

بإسقاط j على n نحصل على النتيجة

(ب) حيث $A_{pqr} - A_{p,rq}$ هي كمية ممتدة $R_{pqr}^n A_n$ هي كمية ممتدة ، وحيث أن A_n تكون كمية ممتدة اختيارية ، R_{pqr}^n تكون كمية ممتدة يتناولون خارج القسمة ، هذه الكمية الممتدة تسمى كمية ريمان - كريستوفل الممتدة وأحياناً تكتب R_{pqr}^n أو ببساطة R_{pqr} .

(ج) $R_{pqr} = R_{pqr}^n$ كمية ممتدة مترافقة مع R_{pqr}^n ، ولذلك تكون كمية ممتدة . ونسئ كمية ممتدة الانحراف منهذ الاختلاف وهو ذو أهمية أساسية في النظرية النسبية العامة لينشتين

مسائل متنوعة

الإجابة على هذه المسائل المتنوعة مضافة في آخر هذا الفصل

٧٧- أكتب كلا من الآت مستخدماً اصطلاح التجميع

$$A^{21} B_1 + A^{22} B_2 + A^{23} B_3 + \dots + A^{2n} B_n \quad (\text{ب}) \quad a_1 x^2 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^2 \quad (1)$$

$$a^{21} B_{11} + a^{22} B_{21} + a^{23} B_{31} + \dots + a^{2n} B_{n1} \quad (\text{د}) \quad A_1^j B^1 + A_2^j B^2 + \dots + A_n^j B^n \quad (2)$$

$$B_{12}^{121} + B_{12}^{122} + B_{21}^{221} + B_{21}^{222} \quad (3)$$

٧٨- أكتب الحدود لكل من التجميعات الموضحة التالية

$$\frac{\partial g^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^h}{\partial x^k} \quad (\text{ج}) \quad A^j B_k^j C_j, N=2 \quad (\text{ب}) \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k), N=3 \quad (1)$$

٧٩- ما هو الحيل المختص المثل بالمعادلة $a_{jk} x^k x^j = 1$ حيث $x^k, k=1, 2, \dots, N$ هي إحداثيات متعامدة ، g_k تكون

كمية موجبة ثابتة $3, 2, N$ أو 4

٨٠- إذ كانت $N=2$ أكتب نظام المعادلات المظلة بالمعادلة $a_{pq} x^q = b_p$

$$A_{ij} \quad C_{ijk} \quad B_{ijkl} \quad A_{ijkl}^{(1)} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

٨٢ - بين ما إذا كانت الكميات $C(f, k, m, n)$ و $B(f, k, m, n)$ التي تحول من نظام إحداثيات f, k إلى آخر f, k تبعاً لقوانين

$$\bar{C}(p, q, r, s) = \frac{\partial x^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial x^u} \frac{\partial x^v}{\partial x^w} C(f, k, m, n) \quad (1) \quad \bar{B}(p, q, r) = \frac{\partial x^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial x^s} \frac{\partial x^t}{\partial x^u} B(f, k, m, n) \quad (2)$$

هي كميات متبعة إذا كان ذلك ، أكتب الكميات المتبعة بتدوين ملائم وأعط المرتبة ورتب المتبعة الاختلاف والمتضادة الاختلاف .

٨٣ - كم عدد مركبات الكمية المتبعة من المرتبة n في فراغ ذي n أبعاد .

٨٤ - أثبت أنه إذا كانت مركبات الكمية المتبعة تساوى صفراً في نظام إحداثي واحد فإنها تكون صفراً في كل نظم الإحداثيات .

٨٥ - أثبت أنه إذا كانت مركبات كيتين متبعين متساوية في نظام إحداثي واحد فإنها تكون متساوية في كل نظم الإحداثيات .

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} A_{kl}^{(1)} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12) \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (17) \quad (18) \quad (19) \quad (20) \quad (21) \quad (22) \quad (23) \quad (24) \quad (25) \quad (26) \quad (27) \quad (28) \quad (29) \quad (30) \quad (31) \quad (32) \quad (33) \quad (34) \quad (35) \quad (36) \quad (37) \quad (38) \quad (39) \quad (40) \quad (41) \quad (42) \quad (43) \quad (44) \quad (45) \quad (46) \quad (47) \quad (48) \quad (49) \quad (50) \quad (51) \quad (52) \quad (53) \quad (54) \quad (55) \quad (56) \quad (57) \quad (58) \quad (59) \quad (60) \quad (61) \quad (62) \quad (63) \quad (64) \quad (65) \quad (66) \quad (67) \quad (68) \quad (69) \quad (70) \quad (71) \quad (72) \quad (73) \quad (74) \quad (75) \quad (76) \quad (77) \quad (78) \quad (79) \quad (80) \quad (81) \quad (82) \quad (83) \quad (84) \quad (85) \quad (86) \quad (87) \quad (88) \quad (89) \quad (90) \quad (91) \quad (92) \quad (93) \quad (94) \quad (95) \quad (96) \quad (97) \quad (98) \quad (99) \quad (100)$$

٨٦ - أوجد مركبات الكمية المتبعة المتضادة الاختلاف والمتضادة الاختلاف في (١) الإحداثيات الأسطوانية ρ, ϕ, z .
(٢) الإحداثيات الكروية ρ, θ, ϕ إذا كانت مركباتها المتبعة الاختلاف في الإحداثيات العمودية هي yz, xz, yz, xz, yz, xz .

٨٨ - المركبات المتضادة الاختلاف ل كمية متبعة في الإحداثيات العمودية هي $yz, 3, 2x + y$. أوجد مركباتها المتضادة الاختلاف في الإحداثيات الأسطوانية ذات القطع المكافئ .

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} A_{kl}^{(1)} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12) \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (17) \quad (18) \quad (19) \quad (20) \quad (21) \quad (22) \quad (23) \quad (24) \quad (25) \quad (26) \quad (27) \quad (28) \quad (29) \quad (30) \quad (31) \quad (32) \quad (33) \quad (34) \quad (35) \quad (36) \quad (37) \quad (38) \quad (39) \quad (40) \quad (41) \quad (42) \quad (43) \quad (44) \quad (45) \quad (46) \quad (47) \quad (48) \quad (49) \quad (50) \quad (51) \quad (52) \quad (53) \quad (54) \quad (55) \quad (56) \quad (57) \quad (58) \quad (59) \quad (60) \quad (61) \quad (62) \quad (63) \quad (64) \quad (65) \quad (66) \quad (67) \quad (68) \quad (69) \quad (70) \quad (71) \quad (72) \quad (73) \quad (74) \quad (75) \quad (76) \quad (77) \quad (78) \quad (79) \quad (80) \quad (81) \quad (82) \quad (83) \quad (84) \quad (85) \quad (86) \quad (87) \quad (88) \quad (89) \quad (90) \quad (91) \quad (92) \quad (93) \quad (94) \quad (95) \quad (96) \quad (97) \quad (98) \quad (99) \quad (100)$$

٩٠ - إذا كان $A_{ij}^{(1)}$ كمية متبعة ، بين أن $A_{ij}^{(2)}$ تكون كمية متبعة متضادة الاختلاف من المرتبة واحد .

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} A_{kl}^{(1)} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12) \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (17) \quad (18) \quad (19) \quad (20) \quad (21) \quad (22) \quad (23) \quad (24) \quad (25) \quad (26) \quad (27) \quad (28) \quad (29) \quad (30) \quad (31) \quad (32) \quad (33) \quad (34) \quad (35) \quad (36) \quad (37) \quad (38) \quad (39) \quad (40) \quad (41) \quad (42) \quad (43) \quad (44) \quad (45) \quad (46) \quad (47) \quad (48) \quad (49) \quad (50) \quad (51) \quad (52) \quad (53) \quad (54) \quad (55) \quad (56) \quad (57) \quad (58) \quad (59) \quad (60) \quad (61) \quad (62) \quad (63) \quad (64) \quad (65) \quad (66) \quad (67) \quad (68) \quad (69) \quad (70) \quad (71) \quad (72) \quad (73) \quad (74) \quad (75) \quad (76) \quad (77) \quad (78) \quad (79) \quad (80) \quad (81) \quad (82) \quad (83) \quad (84) \quad (85) \quad (86) \quad (87) \quad (88) \quad (89) \quad (90) \quad (91) \quad (92) \quad (93) \quad (94) \quad (95) \quad (96) \quad (97) \quad (98) \quad (99) \quad (100)$$

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} A_{kl}^{(1)} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12) \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (17) \quad (18) \quad (19) \quad (20) \quad (21) \quad (22) \quad (23) \quad (24) \quad (25) \quad (26) \quad (27) \quad (28) \quad (29) \quad (30) \quad (31) \quad (32) \quad (33) \quad (34) \quad (35) \quad (36) \quad (37) \quad (38) \quad (39) \quad (40) \quad (41) \quad (42) \quad (43) \quad (44) \quad (45) \quad (46) \quad (47) \quad (48) \quad (49) \quad (50) \quad (51) \quad (52) \quad (53) \quad (54) \quad (55) \quad (56) \quad (57) \quad (58) \quad (59) \quad (60) \quad (61) \quad (62) \quad (63) \quad (64) \quad (65) \quad (66) \quad (67) \quad (68) \quad (69) \quad (70) \quad (71) \quad (72) \quad (73) \quad (74) \quad (75) \quad (76) \quad (77) \quad (78) \quad (79) \quad (80) \quad (81) \quad (82) \quad (83) \quad (84) \quad (85) \quad (86) \quad (87) \quad (88) \quad (89) \quad (90) \quad (91) \quad (92) \quad (93) \quad (94) \quad (95) \quad (96) \quad (97) \quad (98) \quad (99) \quad (100)$$

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} A_{kl}^{(1)} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12) \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (17) \quad (18) \quad (19) \quad (20) \quad (21) \quad (22) \quad (23) \quad (24) \quad (25) \quad (26) \quad (27) \quad (28) \quad (29) \quad (30) \quad (31) \quad (32) \quad (33) \quad (34) \quad (35) \quad (36) \quad (37) \quad (38) \quad (39) \quad (40) \quad (41) \quad (42) \quad (43) \quad (44) \quad (45) \quad (46) \quad (47) \quad (48) \quad (49) \quad (50) \quad (51) \quad (52) \quad (53) \quad (54) \quad (55) \quad (56) \quad (57) \quad (58) \quad (59) \quad (60) \quad (61) \quad (62) \quad (63) \quad (64) \quad (65) \quad (66) \quad (67) \quad (68) \quad (69) \quad (70) \quad (71) \quad (72) \quad (73) \quad (74) \quad (75) \quad (76) \quad (77) \quad (78) \quad (79) \quad (80) \quad (81) \quad (82) \quad (83) \quad (84) \quad (85) \quad (86) \quad (87) \quad (88) \quad (89) \quad (90) \quad (91) \quad (92) \quad (93) \quad (94) \quad (95) \quad (96) \quad (97) \quad (98) \quad (99) \quad (100)$$

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} A_{kl}^{(1)} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12) \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (17) \quad (18) \quad (19) \quad (20) \quad (21) \quad (22) \quad (23) \quad (24) \quad (25) \quad (26) \quad (27) \quad (28) \quad (29) \quad (30) \quad (31) \quad (32) \quad (33) \quad (34) \quad (35) \quad (36) \quad (37) \quad (38) \quad (39) \quad (40) \quad (41) \quad (42) \quad (43) \quad (44) \quad (45) \quad (46) \quad (47) \quad (48) \quad (49) \quad (50) \quad (51) \quad (52) \quad (53) \quad (54) \quad (55) \quad (56) \quad (57) \quad (58) \quad (59) \quad (60) \quad (61) \quad (62) \quad (63) \quad (64) \quad (65) \quad (66) \quad (67) \quad (68) \quad (69) \quad (70) \quad (71) \quad (72) \quad (73) \quad (74) \quad (75) \quad (76) \quad (77) \quad (78) \quad (79) \quad (80) \quad (81) \quad (82) \quad (83) \quad (84) \quad (85) \quad (86) \quad (87) \quad (88) \quad (89) \quad (90) \quad (91) \quad (92) \quad (93) \quad (94) \quad (95) \quad (96) \quad (97) \quad (98) \quad (99) \quad (100)$$

٩٥ - إذا كان B, A كميات متبعة ، أثبت أن $A_{ij}^{(1)} B^{ij}$ تكون كميات متبعة وأوجد مرتبة كل منهما .

٩٦- بين أنه إذا كان A_{rs}^{pq} كمية ممتدة ، إذن $A_{rs}^{pq} + A_{sr}^{qp}$ تكون كمية ممتدة مماثلة و $A_{rs}^{pq} - A_{sr}^{qp}$ تكون تماثل متخالفاً .

٩٧- إذا كان A_{rs} و B_{rs} كميات ممتدة متخالفة التماثل ، بين أن $A_{rs}^{pq} = B_{rs}^{pq}$ تكون متماثلة .

٩٨- إذا كانت كمية ممتدة متماثلة (متخالفة التماثل) حل تكرر الانكماش للكمية الممتدة تكون أيضاً متماثلة (متخالفة - تماثل) ؟

٩٩- أثبت أن $0 = 0$ في A_{pq} إذا كان A_{pq} كمية ممتدة متخالفة التماثل .

١٠٠- ما هو أكبر عدد المركبات المختلفة لكمية ممتدة متماثلة متضادة الاختلاف من الرتبة اثنين إذا كان

$$(1) \quad N = 4 \quad (ب) \quad N = 6 \quad \text{ما هو للعدد لأي قيمة لـ } N \quad ؟$$

١٠١- كم عدد المركبات غير الصفيرية المشيئة ، غير المختلفة في الإشارة للكمية الممتدة المتضادة الاختلاف المتخالفة التماثل من الرتبة الثالثة ؟

١٠٢- إذا كان A_{rs}^{pq} كمية ممتدة ، أثبت أن الانكماش التتالي ينتج ثابتاً .

١٠٣- أثبت أن الشرط اللازم والكافي لتصبح كمية ممتدة من الرتبة R ثابتة بتكرار الانكماش هو أن R تكون زوجية وأن تكون الأسس للمتضادة الاختلاف والمتضادة الاختلاف تساوي $R/2$

١٠٤- إذا كان A_{pq} و B_{rs}^{pq} كميات ممتدة ، بين أن حاصل الضرب الخارجى يكون كمية ممتدة من الرتبة أربعة وأن حاصل ضرب داخليين يمكن أن يكونا من الرتبة اثنين وصفر على الترتيب .

١٠٥- إذا كان $C^p = A(p, q) B_q$ حيث B_q كمية ممتدة اختيارية متضادة الاختلاف من الرتبة واحد و C^p كمية ممتدة متضادة الاختلاف من الرتبة واحد ، بين أن $A(p, q)$ لابد أن تكون كمية ثابتة مختلفة من الرتبة اثنين .

١٠٦- ليكن AP و B_q كميات ممتدة اختيارية بين أنه إذا كان $C(p, q) B_q$ ثابتاً ، إذن $C(p, q)$ تكون كمية ممتدة يمكن كتابتها على الصورة C_p^q

١٠٧- أوجد حاصل الجمع $S = A + B$ ، الفرق $D = A - B$ وحاصل الضرب $P = AB$ و $Q = BA$ ، حيث A و B تكون مصفوفات

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(ب) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

١٠٨- أوجد $(2A-B)(2A-2B)$ حيث A و B هي المصفوفات التي في المسألة السابقة.

١٠٩- (١) حق أن $\det(AB) = \{\det A\} \{\det B\}$ المصفوفات التي في المسألة ١٠٧

(ب) حل المعادلة $\det(AB) = \det(BA)$ ؟

١١٠- ليكن $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

بين أن (١) AB تكون معرفة وأوجدنا (ب) BA و $A+B$ تكون غير معرفة

١١١- أوجد x, y, z بحيث أن $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

١١٢- معكوس المصفوفة المربعة A ، نكتب A^{-1} المعروفة بالمعادلة $AA^{-1} = I$ ، حيث I هي وحدة المصفوفة الزم. لها القيم واحد في قطرها الأساسي وصفر في أي مكان آخر.

أوجد A^{-1} إذا (١) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ (ب) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

حل $A^{-1}A = I$ في هذه الحالات

١١٣- أثبت أن $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس

١١٤- أثبت أن $AB^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ حيث A و B مصفوفات مربعة غير فردية

١١٥- عبر بصيغة المصفوفات عن المعادلات المعطاة للاق :

(١) متجه متضاد الاختلاف (ب) كمية متجهة الاختلاف من المرتبة اثنين

(ج) كمية متجهة مختلطة من المرتبة اثنين.

١١٦- أوجد قيم الثابت λ بحيث أن $AX = \lambda X$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$ و X مصفوفة اختيارية. حله للقيم

الثابت λ تسمى القيم المميزة أو القيم الوحيدة للمصفوفة A .

١١٧- المعادلة $F(\lambda) = 0$ من المسألة السابقة لإيجاد القيم المميزة للمصفوفة A تسمى المعادلة المميزة للمصفوفة A .

بين أن $F(A) = 0$ حيث $F(A)$ هي المصفوفة التي حصلنا عليها بإحلال λ محل A في المعادلة المميزة وحيث

أن الحد الثابت C حل عمل المصفوفة CI ولتكن O هو المصفوفة التي عناصرها تساوي صفر (تسمى المصفوفة

الذرية) النتيجة حالة خاصة من نظرية هاملتون- سيل والتي تذكر أن المصفوفة تحقق معادلتها المميزة.

$$118 - \text{أثبت أن } (AB)^T = B^T A^T$$

١١٩ - أوجد الكمية الممتدة المترية وقرين الكمية للمتعة المترية في

(١) الأحاديات الأسطوانية ذات القطع المكافئ (ب) الأحاديات الأسطوانية ذات القطع الناقص .

$$120 - \text{أثبت أنه تحت التحول المأثور } x^2 = x^2 + b^2 \text{ حيث } b^2 \text{ تكون ثوابت بحيث أن } g_{ij}^2 = g_{ij}^1$$

لا يوجد هناك تمييز بين المركبات المتصلة الاختلاف والمتضادة الاختلاف الكمية الممتدة . في الحالة الخاصة الو تكون فيها التحول من نظم إحداثي واحد متعامد إلى آخر ، تسمى الكميات الممتدة كميات ممتدة كرتيزية .

$$121 - \text{أوجد } g \text{ و } h \text{ للمناظرة الكمية } g_{ij}^2 = g_{ij}^1 - 2g_{ij}^1 g_{ij}^2 + 3(g_{ij}^1)^2 = 3(g_{ij}^1)^2$$

$$122 - \text{إذا كان } A_j^i = g_{jk}^i A_j^k \text{ بين أن } A_j^i = g_{jk}^i A_j^k \text{ وبالعكس .}$$

١٢٣ - عبر عن العلاقة بين الكميات الممتدة المترافقة .

$$(1) A_{ij}^{pq} \text{ و } A_{ij}^{rs} \text{ (ب) } A_{ij}^{pq} \text{ و } A_{ij}^{rs} \text{ (ج) } A_{ij}^{pq} \text{ و } A_{ij}^{rs}$$

$$124 - \text{بين أن } A_{ij}^{pq} B_{pq}^{rs} = A_{ij}^{pq} B_{pq}^{rs} \text{ (ب) } A_{ij}^{pq} B_{pq}^{rs} = A_{ij}^{pq} B_{pq}^{rs}$$

ثم وضع النتيجة العامة بأن الرمز النمية في حد يمكن أن ينخفض من مكانه العلوى ويرفع من مكانه السفلى بدون تغيير قيمة الحد .

$$125 - \text{بين أنه إذا كان } A_{ij}^{pq} = B_{ij}^{pq} C_r^r \text{ ، إذن } A_{ij}^{pq} = B_{ij}^{pq} C_r^r \text{ ، ثم وضع النتيجة}$$

أن الأس الحر في معادلة كمية ممتدة يمكن أن يرفع أو ينخفض بدون التأثير على صلاحية المعادلة .

$$126 - \text{بين أن الكميات الممتدة } g_{ij}^2 \text{ و } g_{ij}^1 \text{ تكون كميات ممتدة مترافقة .}$$

$$127 - \text{أثبت (أ) } \frac{\partial g_{ij}^2}{\partial x^k} = g_{ij}^1 \frac{\partial g_{ij}^2}{\partial x^k} \text{ (ب) } \frac{\partial g_{ij}^2}{\partial x^k} = g_{ij}^1 \frac{\partial g_{ij}^2}{\partial x^k}$$

١٢٨ - إذا كان A_{ij} مجال متجه ، أوجد وحدة المتجه للمناظرة .

١٢٩ - بين أن جيوب تمام القزوايا التي تصنعها وحدة المتجه لثلاث الأبعاد مع منحنيات الأحاديات تعطي بالملاقات

$$\frac{U_1}{\sqrt{g_{11}}} , \frac{U_2}{\sqrt{g_{22}}} , \frac{U_3}{\sqrt{g_{33}}}$$

١٣٠ - أوجد رموز كرهيموتل من النوع الأول في الأحاديات

(١) العمودية (ب) الأسطوانية (ج) الكروية

١٣١- أوجد رموز كريستوفل من النوع الأول والثاني في الأحداثيات

(١) الأسطوانية ذات القطع المكافئ* (ب) الأسطوانية ذات القطع الناقص.

١٣٢- أوجد للمعادلات التفاضلية الجبرديات في الأحداثيات .

(١) الأسطوانية (ب) الكروية

١٣٣- بين أن الجبرديات على المستوى تكون خطوطاً مستقيمة .

١٣٤- بين أن الجبرديات على الكرة تكون أقواساً من دوائر كبيرة .

١٣٥- أكتب رموز كريستوفل من النوع الثاني للكرة .

$$dx^2 = (dx^1)^2 + [(dx^2)^2 - (dx^3)^2]$$

ومعادلات جيوديسى المتناظرة .

١٣٦- أكتب المشتقة المتجهة الاختلاف بالنسبة إلى x^a لكل من الكميات المشتقة التالية :

$$A_{lm}^{jk} \quad A_{lm}^{jk} \quad A_{lm}^{jk} \quad A_{lm}^{jk} \quad A_{lm}^{jk}$$

١٣٧- أكتب المشتقة المتجهة الاختلاف لكل A_{jk}^{ik} (١) A_{jk}^{ik} (ب) A_{jk}^{ik} (ج) بالنسبة إلى x^a

١٣٨- استخدم العلاقة $A_{jk}^{ik} = A_{jk}^{ik}$ لإيجاد المشتقة المتجهة الاختلاف للكمية A_{jk}^{ik} من المشتقة المتجهة الاختلاف للكمية A_{jk}^{ik} .

١٣٩- إذا كانت Φ ثابتاً ، أثبت أن $\Phi_{,pq} = \Phi_{,qp}$ أي أن رتبة التفاضل المتجهة الاختلاف لثابت غير جوهري

١٤٠- بين أن $\Phi_{,pq}$ و $\Phi_{,qp}$ تكون كميات متجهة الاختلاف ومتعادلة الاختلاف على الترتيب .

١٤١- عبر عن التباين لمتجه A^p بدلالة مركباته الفيزيائية في الأحداثيات (١) الأسطوانية ذات القطع المكافئ* (ب) الجسم المكافئ* .

١٤٢- أوجد المركبات الفيزيائية لقيمة Φ في الأحداثيات

(١) الأسطوانية ذات القطع المكافئ* (ب) الأسطوانية ذات القطع الناقص .

١٤٣- أوجد $\nabla^2 \Phi$ في الأحداثيات الأسطوانية ذات القطع المكافئ*

١٤٤- استخدم رمز الكمية للمتجه بين أن $\text{div curl } A^i = 0$ (١) $\text{curl grad } \Phi = 0$ (ب)

١٤٥- أحسب المشتقات الذاتية لكل من مجالات الكمية المتجهة الآتية بفرض أنها دوال تفاضلية في

$$(١) A_{jk} \quad (ب) A_{jk} \quad (ج) A_{jk} \quad (د) A_{jk} \quad (هـ) A_{jk}$$

١٤٩ - أوجد المشتقة الثلاثية لكل (١) A^h_{jh} (ب) A^j_h (ج) A^j_{jh}

١٤٧ - أثبت. $\frac{d}{ds} (g^{pq} A_p A_q) = 2 g^{pq} A_p \frac{\delta A_q}{\delta s}$

١٤٨ - بين أنه إذا لم تؤثر قوة خارجية على جسم متحرك له كتلة ثابتة يتحرك على جبهوديس يسطى بالعلاقة

$$\frac{\delta}{\delta s} \left(\frac{dx^a}{ds} \right) = 0$$

١٤٩ - أثبت أن حاصل الجمع والفرق لكتبتين نسبتيين نسبتيين لم نفس الوزن والنوع تكون أيضا كمية معدة نسببة لها نفس الوزن والنوع .

١٥٠ - إذا كان A^{pq}_r كمية معدة نسببة لها الوزن w ، أثبت أن $g^{pq} A^{pq}_r$ تكون كمية معدة مطلقة

١٥١ - إذا كان $A^{pq}_r = C^{pq}_r$ حيث B^{pq}_r كمية معدة نسببة اختيارية لها الوزن w_1 و C^{pq}_r كمية معدة نسببة مسرورة لها الوزن w_2 أثبت أن $A(p, q)$ تكون كمية معدة نسببة لها الوزن $w_1 - w_2$. هذا يكون مثلا حل قانون خارج القسمة للكتبات المعدة النسبية .

١٥٢ - بين أن الكمية $G(j, k)$ في حل المسألة ٣١ تكون كمية معدة نسببة لها الوزن اثنين .

١٥٣ - أوجد المركبات الطبيعية للآتي (١) السرعة (ب) البصلة لجسم في الأحداثيات الكروية .

١٥٤ - ليكن A^r و B^r متجهين في الفراغ الثلاثي الأبعاد . بين أنه إذا كان λ و μ ثوابت ، إذن $C^r = \lambda A^r + \mu B^r$ يكون متجهها في مستوى كل من A^r و B^r . ما هو التفسير في فراغ ذو أبعاد أكثر ؟

١٥٥ - بين أن متجهها عوديا على السطح $\text{constant} = \phi(x^1, x^2, x^3)$ يسطى بالعلاقة $g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q} = 0$ أوجد وحدة السمو المناظر .

١٥٦ - معادلة الاستمرار تعطى بالعلاقة $\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma v) = 0$. حيث σ تكون الكثافة و v سرعة المائع . عبر عن المعادلة في صيغة كمية معدة .

١٥٧ - عبر عن معادلة الاستمرار في الأحداثيات (١) الأسطوانية (ب) الكروية .

١٥٨ - عبر عن نظرية ستوكس في صيغة كمية معدة .

١٥٩ - أثبت أن انحاد الكمية المعدة المتجهة الأخطاف R_{pqrs} تكون تماثلا متناظرا في (١) p, q, r, s (ب) s, r, q, p

١٦٠ - أثبت $R_{pqrs} = R_{rspq}$

١٦٧- بين أنه لمساعد مثبت في النظام (\bar{x}) ، قضيب مثبت في النظام (\bar{y}) يرقه موازها للاحداث (\bar{x}_1) ، وله الطول L في هذا النظام يظهر أن له طولاً أصغر $L\sqrt{1-\beta^2}$ هذه الظاهرة تسمى انكماش لورنتز - فييجرالت

الاجابة على المسائل المتنوعة :

$$B_{\mu\nu}^{pq}, N=2 \quad (a) \quad \varepsilon^{pq} \varepsilon_{q1}, N=4 \quad (b) \quad A_h^j B^h \quad (c) \quad A^{ij} B_j \quad (d) \quad a_{\lambda\mu} x_{\lambda} x_{\mu} \quad (1) - 77$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} A^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} A^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\sqrt{g} A^3) \quad (1) - 78$$

$$A^{11} B_1^1 C_1 + A^{21} B_1^2 C_2 + A^{32} B_2^3 C_1 + A^{22} B_2^2 C_2 \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^N \partial x^N} \quad (c)$$

٧٩ - قطع ناقص لنقطة $N=2$ ، وجسم القطع الناقص لنقطة $N=3$ ، وجسم القطع الناقص لنقطة $N=4$

$$\begin{cases} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 = b_1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 = b_2 \end{cases} \quad - A^*$$

$$\bar{C}_{pq} = \frac{\partial x^m}{\partial x^p} \frac{\partial x^n}{\partial x^q} C_{mn} \quad (c) \quad \bar{A}_r^{pq} = \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^q}{\partial x^2} \frac{\partial x^h}{\partial x^r} A_h^{ij} \quad (1) - 89$$

$$\bar{A}_0 = \frac{\partial x^0}{\partial x^0} A_0 \quad (d) \quad \bar{B}_s^{pqrs} = \frac{\partial x^p}{\partial x^1} \frac{\partial x^q}{\partial x^2} \frac{\partial x^r}{\partial x^3} \frac{\partial x^s}{\partial x^4} B_h^{ijkl} \quad (b)$$

٨٧ - (١) $B(j, k, m)$ كمية متجهة من المرتبة الثالثة وتكون متجهة الاختلاف من المرتبة الثانية ومتفاداة

الاختلاف من المرتبة واحد. يمكن أن تكتب B_{ijk}^{α} (ب) $C(j, k, m, n)$ ليست كمية متجهة.

$$4^5 = 1024 - 87$$

$$\begin{aligned} 2\rho \cos^2 \phi - z \cos \phi + \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi & \quad (1) - 87 \\ - 2\rho^2 \sin \phi \cos \phi + \rho z \sin \phi + \rho^2 \sin \phi \cos^3 \phi \\ \rho z \sin \phi. \end{aligned}$$

$$2r \sin^2 \theta \cos^2 \phi - r \sin \theta \cos \theta \cos \phi + r^2 \sin^4 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \sin \phi \quad (b)$$

$$2r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi - r^2 \cos^2 \theta \cos \phi + r^4 \sin^2 \theta \cos \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ - r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \phi,$$

$$- 2r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi + r^4 \sin^4 \theta \sin \phi \cos^2 \phi$$

$$1 \quad (d) \quad B_5^{\beta} \quad (c) \quad A^{\gamma\delta} \quad (b) \quad B_9^{\gamma\delta} \quad (1) \quad - 89 \quad \phi^2 \cos^2 \phi + 3\phi, \quad 2m - m\phi^2 z, \quad u^2 + m\phi - u^2 \quad - 88$$

$$94 - ليست كمية متجهة \quad 95 - مرتبة ٣ ومرتبة ١ على الترتيب$$

$$- 98$$

$$N(N-1)(N-2)/6 - 101 \quad N(N+1)/2 \quad (c) \quad 21 \quad (b) \quad 10 \quad (1) - 100$$

$$S = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \quad (1) - 104$$

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -9 & -7 & 10 \\ 9 & 9 & -16 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 8 & -16 & 11 \\ -2 & 10 & -7 \end{pmatrix} (\psi)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -16 & 20 \\ 9 & 163 & -136 \\ -61 & -135 & 132 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -4 & 17 & -3 \end{pmatrix} (\psi) \quad \begin{pmatrix} -52 & -86 \\ 104 & 76 \end{pmatrix} (1) - 10A$$

- 110

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Yes } (\psi) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} (1) - 114 \quad x = -1, y = 3, z = 2 - 111$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A} \\ \bar{A}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}^0}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^0}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^0}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \quad (1) - 116$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} (\psi)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2 \\ \bar{A}_1^3 & \bar{A}_2^3 & \bar{A}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{A}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} (\psi)$$

$$\begin{pmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2 + v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1) - 114 \quad \lambda = 4, -1 - 114$$

$$\begin{pmatrix} a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (ب)$$

$$g = 6, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad - ١٧١$$

$$A_{pq}^{*r} = \kappa_{pj} \kappa_{qt} \delta^{rt} A_{...i}^{jb}(\tau) \quad A_{,q}^{\phi r} = \delta^{ij} \delta^{rt} A_{jq1}(\phi) A^{pq} = \delta^{ij} \delta^{rt} A_{j1}^{\phi}(\phi) \quad (1) - ١٧٢$$

$$\frac{A^p}{\sqrt{A^p A_p}} \propto \frac{A^p}{\sqrt{g_{pq} A^p A^q}} \quad - ١٧٨$$

$$\text{المجموع الثاني الصفري} \quad (1) - ١٧٠$$

$$\{22,1\} = -\rho, \quad \{12,2\} = [21,2] = \rho. \quad \text{All others are zero.}$$

$$\{22,1\} = -r, \quad \{33,1\} = -r \sin^2 \theta, \quad \{33,2\} = -r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (ب)$$

$$\{21,2\} = \{12,2\} = r, \quad \{31,3\} = [13,3] = r \sin^2 \theta$$

$$\{32,3\} = [23,3] = r^2 \sin \theta \cos \theta. \quad \text{All others are zero.} \quad (٣)$$

$$\{11,1\} = u, \quad [22,2] = v, \quad [11,2] = -v, \quad [22,1] = -u, \quad (1) - ١٧١$$

$$[12,1] = [21,1] = v, \quad [21,2] = [12,2] = u.$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{-u}{u^2 + v^2}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad \text{كل الآخرين يكونوا صفرياً.}$$

$$[11,1] = 2a^2 \sinh u \cosh u, \quad [22,2] = 2a^2 \sin v \cos v, \quad [11,2] = -2a^2 \sin v \cos v \quad (ب)$$

$$[22,1] = -2a^2 \sinh u \cosh u, \quad [12,1] = [21,1] = 2a^2 \sin v \cos v, \quad [21,2] = [12,2] = 2a^2 \sinh u \cosh u$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{\sinh u \cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{\sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{-\sinh u \cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{-\sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{\sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}.$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{\sinh u \cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v}. \quad \text{All others are zero.}$$

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = 0 \quad (1) - ١٧٧$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - r \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - r \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (ب)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\phi}{ds} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$كل \begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = x^1, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{x^1}{(x^1)^2 - (x^2)^2}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{(x^1)^2 - (x^2)^2} - 130$$

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} + x^1 \frac{dx^2}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 x^2}{ds^2} + \frac{2x^1}{(x^1)^2 - (x^2)^2} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + \frac{x^2}{(x^1)^2 - (x^2)^2} \left(\frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 0$$

$$A_{l,q}^{jh} = \frac{\partial A_l^{jh}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ lq \end{matrix} \right\} A_s^{jh} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_s^{jh} + \left\{ \begin{matrix} h \\ qs \end{matrix} \right\} A_s^{jh} \quad (1) - 139$$

$$A_{lm,q}^{jh} = \frac{\partial A_{lm}^{jh}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ lq \end{matrix} \right\} A_{sm}^{jh} - \left\{ \begin{matrix} s \\ mq \end{matrix} \right\} A_{ls}^{jh} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lm}^{jh} + \left\{ \begin{matrix} h \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lm}^{jh} \quad (ب)$$

$$A_{klm,q}^j = \frac{\partial A_{klm}^j}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A_{slm}^j - \left\{ \begin{matrix} s \\ lq \end{matrix} \right\} A_{ksm}^j - \left\{ \begin{matrix} s \\ mq \end{matrix} \right\} A_{kls}^j + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_{klm}^j \quad (٣)$$

$$A_{m,q}^{jhl} = \frac{\partial A_m^{jhl}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ mq \end{matrix} \right\} A_s^{jhl} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_m^{jhl} + \left\{ \begin{matrix} h \\ qs \end{matrix} \right\} A_m^{jhl} + \left\{ \begin{matrix} l \\ qs \end{matrix} \right\} A_m^{jhl} \quad (د)$$

$$A_{lmn,q}^{jh} = \frac{\partial A_{lmn}^{jh}}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ lq \end{matrix} \right\} A_{smn}^{jh} - \left\{ \begin{matrix} s \\ mq \end{matrix} \right\} A_{lsn}^{jh} - \left\{ \begin{matrix} s \\ nq \end{matrix} \right\} A_{lms}^{jh} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{jh} + \left\{ \begin{matrix} h \\ qs \end{matrix} \right\} A_{lmn}^{jh} \quad (هـ)$$

$$\delta_h^j A_{j,q}^h(\tau) = A_{i,q}^j B_h^i + A_{h,q}^j B_h^i (\cdot) \quad \theta_{jk} A_{i,q}^h(1) - 147$$

$$\frac{1}{u^2+v^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{u^2+v^2} A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{u^2+v^2} A_v) \right] + \frac{\partial A_g}{\partial z} \quad (1) - 141$$

$$\frac{1}{uv(u^2+v^2)} \left[\frac{\partial}{\partial u} (uv\sqrt{u^2+v^2} A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (uv\sqrt{u^2+v^2} A_v) \right] + \frac{1}{uv} \frac{\partial^2 A_g}{\partial z^2} \quad (ب)$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} a_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial v} a_v + \frac{\partial \Phi}{\partial z} a_z \quad (1) - 142$$

$$\frac{1}{u\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} a_u + \frac{\partial \Phi}{\partial v} a_v \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} a_z \quad (ب)$$

حيث u و v و z تكون وحدة الاتجاهات في اتجاهات زيادة u و v و z على الترتيب

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + (u^2+v^2)\Phi = 0 \quad - 143$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} = A_{k,q} \frac{dx^q}{dt} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A_s \right) \frac{dx^q}{dt} = \frac{dA_k}{dt} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} A_s \frac{dx^q}{dt} \quad (1) - 140$$

$$\frac{\partial A^{jh}}{\partial t} = \frac{dA^{jh}}{dt} - \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\} A^{ih} \frac{dx^j}{dt} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qh \end{matrix} \right\} A^{js} \frac{dx^q}{dt} \quad (ب)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (A_j B^h) &= \frac{\partial A_j}{\partial t} B^h + A_j \frac{\partial B^h}{\partial t} \\ &= \left(\frac{dA_j}{dt} - \left\{ \begin{matrix} s \\ jh \end{matrix} \right\} A_s \frac{dx^h}{dt} \right) B^h + A^j \left(\frac{dB^h}{dt} + \left\{ \begin{matrix} h \\ qs \end{matrix} \right\} B^s \frac{dx^q}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi A_h^j) &= \Phi \frac{\partial A_h^j}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} A_h^j \\ &= \Phi \left(\frac{dA_h^j}{dt} + \left\{ \begin{matrix} i \\ qh \end{matrix} \right\} A_h^i \frac{dx^q}{dt} - \left\{ \begin{matrix} s \\ hq \end{matrix} \right\} A_s^j \frac{dx^q}{dt} \right) + \frac{d\Phi}{dt} A_h^j \end{aligned} \quad (3)$$

$$e_{jh} \frac{\partial A^h}{\partial t} = e_{jh} \left(\frac{dA^h}{dt} + \left\{ \begin{matrix} h \\ qs \end{matrix} \right\} A^s \frac{dx^q}{dt} \right) \quad (1) - 141$$

$$e_h^j \frac{\partial A_j}{\partial t} = e_h^j \left(\frac{dA_j}{dt} - \left\{ \begin{matrix} s \\ jh \end{matrix} \right\} A_s \frac{dx^j}{dt} \right) = \frac{dA_h}{dt} - \left\{ \begin{matrix} s \\ hq \end{matrix} \right\} A_s \frac{dx^q}{dt} \quad (ب)$$

$$e_{jh} e_r^j \frac{\partial A^r}{\partial t} = e_{rh} \left(\frac{dA^r}{dt} - \left\{ \begin{matrix} s \\ rh \end{matrix} \right\} A_s^r \frac{dx^q}{dt} + \left\{ \begin{matrix} r \\ qs \end{matrix} \right\} A_p^s \frac{dx^q}{dt} \right) \quad (3)$$

$$i, r^2, r \sin^2 \phi \quad (1) - 142$$

$$\nabla = r^2 \rho - r \sin^2 \phi \phi^2, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \phi^2) = r \sin \theta \cos \theta \phi^2, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \phi) \quad (ب)$$

$$\text{حيث } \nabla \text{ تكون مركبات السرعة المتضادة المختلف .} \quad \frac{\partial (\sigma v^q)}{\partial x^q} + \frac{\sigma v^q}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^q} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad - 143$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma v^h) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\sigma v^h) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma v^h) + \frac{\sigma v^h}{\rho} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (1) - 144$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\sigma v^h) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma v^h) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\sigma v^h) + \sigma \left(\frac{2v^2}{r} + v^2 \cot \theta \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (ب)$$

حيث v^2, v^h, v^q

$$C \text{ تكون وحدة المساحة معية المساحة المتغير المثلث } C \text{ حيث } \int_C A_p \frac{dx^p}{dt} ds = - \iint_S e^{pq} A_{q,r} \lambda_r ds \quad - 145$$

و V تكون وحدة المساحة الموجب السطح S الذي له الحدود C

GLOSSARY المصطلحات

Chapter 1

Vector
Scalar
Components of a vector
Scalar field
Vector field
System
Set
Base vector
Commutative law
Associative law
Distributive law
Rectangular unit vectors
Non-collinear vectors
Non-coplanar vectors

Chapter 2

Dot or scalar product
Cross of vector product
Reciprocal sets of vectors
Right-handed system

Chapter 3

Vector differentiation
Space curves
Continuity
Differentiability
Partial derivatives of vectors
Differential geometry
Binormal
Order
Centripetal acceleration
Scalar vector
Coefficients
Factor

الفصل الأول

متجه
محصي
مركبات المتجه
مجال محلي
مجال متجه
نظام
لغة
متجهات الأساس
قانون التبدل
قانون الترافق
قانون التوزيع
وحدة المتجهات المربعة
متجهات غير متوازية
متجهات ليست في مستوى واحد

الفصل الثاني

ضرب الكيات العددية
ضرب الكيات المتجه
ثلاث المتجهات المتكفية
منظومة يمنية

الفصل الثالث

لفاضل المتجه
مشتقات التفاضل
الاستمرارية
التفاضلية (التفاضلية للفاضل)
الفاضل الجزئي للمتجهات
التفاضل المتكفية
ثنائي التفاضل
ترتيب
السرعة الحلقية المركزية
متغير محلي
معاملات
المتغير

Operator	العامل المؤثر
Domain	متطفة

Chapter 4

الفصل الرابع

Gradient	الانحدار
Divergence	التباعد
Curl	الانحناء
Differentiable scalar functions	دوال عادية قابلة للتفاضل
Dyads	مؤلفة ثنائية
Invariance	الثبات
Irrotational	لا دوراني
Array	صف

Chapter 5

الفصل الخامس

Vector Integration	تكامل المتجه
Line Integrals	التكاملات الخطية
Surface Integrals	التكاملات سطحية
Contribution	الاسهام
Arbitrary constant vector	متجه ثابت اعتيادي
Conic Section	قطع مخروطي
Conservative field	مجال محافظ

Chapter 6

الفصل السادس

Subscripts	رمز سفلي
Polyhedra	بتعدد السطوح
Rigid body	جسم صلب
Current Density	كثافة التيار
Curvature	الانحناء
Arc length	طول قوس
Cycloid	دويري
Charge	شحنة
Exact differentials	تفاضل مضبوط
Reciprocal systems	نظم متماكسة
Simply - connected region	منطقة متصلة بسيطة
Solid angle	زاوية مجسة

Chapter 7

الفصل السابع

Differentiable scalar functions	دوال عادية قابلة للتفاضل
An affine transformation	تحول متصل (متشعب)

Matrix	مصفوفة
Invariance	الثبات
Gradient	الاتجاه
Cylindrical coordinate	الاحداثيات الاسطوانية
Spherical coordinate	الاحداثيات الكروية
Parabolic cylindrical coordinate	الاحداثيات الاسطوانية لقطع مكافئ
Paraboloidal coordinates	احداثيات جسم قطع مكافئ
Elliptic cylindrical coordinates	الاحداثيات الاسطوانية لقطع ناقص
Oblate spherical coordinates	احداثيات شبه الكرة المقطعة
Ellipsoidal coordinates	احداثيات جسم القطع الناقص
Bipolar coordinates	الاحداثيات ثنائية القطب
Toroidal coordinate system	نظام الاحداثيات الحلزونية
Singular points	نقط فردية
Scale factors	معاملات المقياس
The integrand	التكاملية (التكامل)
Moment of inertia	عزم القصور الذاتي
Reciprocal systems of vectors	نظم اتجاهية متعاكسة
Fundamental quadratic	الصفية التربيعية الاساسية
Surface curvilinear coordinates	احداثيات متحنى الانحناء للسطحية
Metric coefficients	معاملات مترية
Curve linear coordinates	احداثيات متحنى الانحناء
Contravariant components	المركبات المضادة للاختلاف
Covariant components	المركبات المتعددة الاختلاف
Differential of arc length	تفاضل طول القوس

Chapter 8

الفصل الثامن

Tensor analyses	تحليل الكمية المستنة
Spaces of N dimensions	الفراغات ذات الأبعاد النونية
Coordinates	احداثيات
Exponents	أس
Superscripts	رمز علوى
Coordinate transformations	تحويلات الاحداث
The summation convention	اصطلاح التجميع
Subscript	رمز سفلى
Dummy index	الأسس الدمية
Umbral index	الأسس المظلم
Free index	أس حر

Rank	مرتبة
Order	درجته
Mixed tensors	التensors المختلطة
Symmetric and skew	التماثل والتماثل المتعاكس
Symmetric tensors	التensors المتماثلة
Contraction	الانكماش (التقلص)
Quotient law	قانون خارج القسمة
Matrices	المصفوفات
A null matrix	المصفوفة الصفرية (الصفرية)
Conformable	متوافقة
Transpose	تحويل
Conjugate of reciprocal	المتكافئ (المتكافئ) أو معكوس
Tensors	(متجهي) التensors المتماثلة
Geodesics	جغرافيات (علم المساحة الفلكية)
Permutation symbols	رموز تبديلية
The intrinsic derivative	المشتقة الذاتية
Independent	مستقلة
The cofactor	المعامل
An extremum	طرق نهاية
Tensor density	كثافة التensors المتماثلة

فهرس ابجدى

		(١)	
٢٠٣-٢٠٠٠١٩٠	إحداثيات عمومًا	٢١٠	أبعاد الفراغ الثورية
٢٠٢٠١٧٩٠١٧٨	في حجم المتناصر	٢٦٠١٥	اتجاه جيوب التمام
٢٦٤٠٢٥٥٠٢٥٤٠١٨٦	في سرعة	٨٩	اتجاه صائب
١٩٠٠١٧٨٠٧٤	في طول قوس	١١٥	اتجاه عقارب الساعة
١٧٦٠٦٤	متماثل	١٤٦٠١٣٦٠١١٥	اتجاه موجب
١٢٧	إحداثيات قطبية	٢٠٤٠٧٠٣٠١٨٤٠١٨٣٠١٧٩٠١٧٨	إحداثيات اسطوانية
٢٠٥٠٢٠٤٠١٩٠٠١٨٣٠١٨٠٠١٧٩	إحداثيات كروية	٢٦٣٠٢٤٤	في رموز كريستوفيل
٢٦٣٠٢٤٤	رموز كريستوفيل	١٨٥	في طول قوس
١٩٨	في الانكشاف	٢٣٧	في كمية مختلفة مترية مر القلة
٢٠٥	في الانحدار		إحداثيات اسطوانية
٢٥١٠٢٥٠٠٢٠٥٥	في التباعد	٢٦٥	في استمرار معادلة
٢٦٣	في الجيوديسيات	١٩٧٠١٩٦	في التناقص
٢٦٥٠٢٠٤	في السرعة والمجيلة	١٠٦	الثبات
٢٢٥٠٢٢٤	في المركبات المتصلة الاختلاف		(أنظر ديل)
٢٥١٠١٩٨	في لابلاسيان		(أنظر عامل لابلاس)
١٨٧٠١٨٦	في حجم عنصر	ديل (١٠٠٧٥) أنظر أيضا الانحدار والتباعد	
٢٠٤	في جاكوبيان		والانكشاف .
٢٣٥	في كمية مختلفة مترية	١٩٠٠١٣٧	صيغة عامل التكامل
٢٠٥	في معادلة الحرارة	٢٥٦٠٢٥٥٠١٨٦	في السرعة والمجيلة
٢٦٤	في معادلة الاستمرار	١٨٧٠١٨٦	في حجم عنصر
٢٣٨	كمية مختلفة مترية مر القلة	٢٠٥	في جاكوبين
١٨٧	لطول للقوس	٢٣٥	في كمية مترية مختلفة
١٧٦	إحداثيات السطوح	٢٥١٠١٩٧٠١٩٦	في لابلاس
١٩٩٠٧٤٠٦٣٠٦٧	إحداثيات معنى الاصلاخ لسطح	٢١٠٠١٧٦٠٩٩٠٥٨٠٥٧	إحداثى التحويلات
١٤٨٠٥٦	في طول قوس	٢٠٤٠١٨٢	إحداثيات جسم القبط المتناقص
	إحداثيات ومعنى الاصلاخ (أنظر إحداثيات معنى الاصلاخ)	٢٦٣٠٢٠٥٠٢٠٤٠١٨٠	إحداثيات جسم قطع مكافئ
١٧٦	إحداثى المنتهيات أو الخطوط	٢٠٥٠٢٠٤٠١٨٠	إحداثيات شبه الكرة
٧٧	إزاحة	٢٠٤٠٢٠٣٠١٨٨٠١٨٢	إحداثيات شبه الكرة للسطول
٥٦	أساسيات هاميلتون	٢٠٩-١٧٦	إحداثيات معنى الاصلاخ
٣٥٠٢٥	إمقاط ء كتجه	١٧٦	تمريف لـ
١٢٤٠١٢٣	السطوح	١٩٩٠٧٤٠٦٣٠٦٧	سطح
٦٣	أمية للصوم		

١٧١٠٩٣	الانكشاف معنى فيزيائي	٢٥٨٠٢٢٢٢٠٢٢١٠٢١٢	إصطلاح التجميع
١٩٧٠١٩٦	في الإحداثيات الاسطوانية	٢١٠٠٧٧	إطارات المقارنة
٢٥٥	في الإحداثيات الاسطوانية لقطع مكافئ	٢٠٥٠٢٠٤٠١٩٩٠١٨٠	الإحداثيات الاسطوانية لقطع ناقص
١٩٣٠١٧٨	في الإحداثيات الانحناء للتعامل	١٨٧٠١٨٦٠١٨٠	الإحداثيات الاسطوانية مكافئة للقطع
١٩٧	في الإحداثيات الكروية	٢٦٣٠٢٠٥٠٢٠٤٠١٩٩٠١٩٨	رموز كريستول
٢٢٣٠٨٢٠٧٧٠٧٦٠٧٥	الانحدار	٢٦٣	في الانحدار
١٩٧٠١٩٦	في الإحداثيات الاسطوانية	٢٦٣٠٢٠٥	في التباديل
٢٦٣٠٢٠٤	في الإحداثيات الاسطوانية مكافئة للقطع	٢٠٤	في الجبر
١٩١٠١٩٠٠١٧٩	في الإحداثيات معنى الاصطلاح للتعامل	٢٠٤	في الجبر
٢٠٤	في الإحداثيات الكروية	٢٠٤	في الانكشاف
١٥٩٠١٥٨	في تعريف التكامل	١٨٧	في حجم العنصر
٩٩	لثبات	١٨٦	في طول القوس
٢٥٠٠٢٢٠	لصيغة كمية متجهة	٢٦٣٠١٩٩٠١٩٨	في لابلاس
٩٤	لنتجه	٢٠٥	في معادلة سيرودنجر
	الانحدار (أنظر الانحدار)	١٨٣٠١٧٨	الإحداثيات المتعامدة وخاص
١٤٥٠٦٠٥٥٨٠٥٠	الانحناء	١٧٩٠١٧٨	اسطوانية (أنظر الإحداثيات الاسطوانية)
٢٥٧	ريمنات - كريستول	١٧٩	اسطوانية مكافئة للقطع (أنظر أيضا الإحداثيات
٢٥٨	كمية متجهة		الاسطوانية مكافئة للقطع)
١٤٥٠٦٠٥٥٨٠٤٩	نصف قطر لـ	٢٦٣٠٢٠٥٠٢٠٤٠١٩٩٠١٨٠	الاسطوانية لقطع ناقص
١٦٤	الإنتشارية	١٨٣	حلقين
٢٢٩٠٢٢٨٠٢١٣	الإشكال	٢٦٤٠٢٠٤٠٢٠٣٠١٨٠	جسم قطع مكافئ
٢٣١٠٢٢٥٠٢١٣	لتصل . بالكميات الممتدة	٢٠٤٠٢٠٣٠١٨٨٠١٨١	فيه الكرة
١١	معادلة المتجه غير المتعرف على	٢٠٤٠٢٠٣٠١٨٠	فيه الكرة المتبادل
٢٧١٠٦٥٠٥٨٠٤٩٠٤٨	التفاضلات المتناسبة	٢٠٣٠١٨٢	قطبي
٢٦٦٠٢٦٥٠٢١٠٠٧٤	التفاضل الاتجاهي	٢٠٤٠١٨٢	قطع ناقص
٨٣٠٨٠٠٧٥	التفاضل الاتجاهي	١٨٠٠١٧٩	كروية (أنظر الإحداثيات الكروية)
٤٩٠٤٨	لتفاضلية (القابلية للتفاضل)	٢٠٥٠٢٠٤٠١٨٨٠١٨١	الإحداثيات الكروية وفيه الكرة
٢٦٥٠٦٠٥٥٨٠٥٠	التواء	٢٠٥٠٢٠٤٠١٨٠	فيه الكرة للتفاضل
٥٨٠٥٠	لتصف القطر	٢٠٥٠١٨١	الإحداثيات ثنائية القطب
	التكامل (أنظر تكاملات ، لمتجهات)	٢١٠	الأسس الزمية
	الثبات (أنظر أيضا ثابت)	٢١٠	الأسس المظلي
١١١	الجلابية وقانون نيوتن العام لـ	٤٨٠٤٧	الاستمرار
٢١٥	الجبر المصفوفات	٢٦٤٠١٦٣٠٨٨	معادلة لـ
٢٠١	المتجهات	٩٣٠٨٧٠٧٦٠٧٥	الانكشاف
٦٤٤٢	الجمع والتمتجهات	١٩٦٠١٩٥٠١٦٠	تعريف تكامل
٦٤٢	لقانون التبدل لـ	١٠٦	ثابت لـ
٦٤٢	لقانون التردد لـ	٢٥٠٠٢٢٠	صيغة كمية متجهة
		٢٦٣٠٨٩٠٧٩	للأعداد

٢٦١	المعادلة المميز ٤	الجميع قانون الثلث لـ
٥١٤٥٠	المعادلات البارامترية لمنحنى	قانون متوازى الأضلاع لـ
١٦	نقط	الجميع والمصفوفات
١٣٠٦٢	لسطح	لكميات الممتدة
٧٢	المنكب للمعوى	الحركة المطلقة
٢٠٥٠١٢٤٠١٣٣	لسطح - لمسافة	الدويرى المنحنى
٧	الموازن	الزاوية وبين معطيين
٢٦٥	النظرية النسبية الخاصة	المجسمة
	(ب)	بين متجهين
	بالوعة	إنشغال الحرارة ، حالة الاستقرار
١٥٥٠٨٧٤١٧	براه وتيكو (حلها فلك)	إنكشاف لوزن - فيتر جارد
١١١	يانيا ، جميع المتجهات	أشنتين ، النظرية النسبية
٤	تتأهل للمتجه	أنشطة الفوس الورق للسكوات
٥		السرعة الزاوية والسرعة
	(ت)	السرعة المساحية
	تحويل ، المصفوفة	المجلة وحل طول منحنى الفراغ
٢٦١٠٢١٥	تحليل السكة الممتدة	الحافظة المركزية
٢٧٠٠٢١٠٠٢٠١٠١٧٨٠٩٤	تحول متصل (متسب)	بالنسبة إلى مشاهدين ثابت ومتحرك
٢٦٥٠٢٦١٠٢٧٧	تحول متصل	في إحداثيات أسطوانية
٢٦٥٠٢٦١٠٢٧٧	للإحداثيات	في إحداثيات عامة
٢١٠٠١٧٦٠٩٨٠٧٧٠٧٦	متعامد	في إحداثيات قطبية
٧٧	تحويلات لا بلاس	في إحداثيات كروية
٢٠٥	تحويلات لوفز	كوديلزو
٢٦٥	تفاضلات مضبوطة	جسم
١٤٣٠١٢٠٠١٠٥٨	شرط لازم وكاف لـ	للصور الأساسى
١٢٠	تفاضلات سطح	للفراغات الإقليدية
١٢٨٠١٢١٠١٠٥٨	حساب	الإحداثيات التوائية
١٠٨	يعرف كنهاية جميع	للقم للمميز أو اللقم الوحدية
١٢٢٠١٢١	تفاضليات المتجهات	المركبات المضادة للاختلاف
٧٣٠٤٦	صيغة لـ	لكمية مضدة
٥٢٠٥١٠٤٨٠٤٤٧	لتفاضل مضبوط	لنتجه
٤٨	بالفبط (أنظر تفاضليا مضبوطة)	المساحة ومحاطة بواسطة منحنى بسيط مغلق
١٣٠٠١٢٨٠١٠٥٨	تكميلات الحجم	لسطح
١٢٩٠١٢٨	كنهاية جميع	لنتجه
٧٥	تفاضل ، مجال عدوى	لثلث
٧٥	مجال متجه	لقطع ناقص
١٦٣	توصيل حصرارى	لتوازى الأضلاع
١٣٥٠١٠٧	تكميلات لنتجه	المشتقة الذاتية أو المطلقة

(ج)		تكاملات حجم (أنظر تكاملات الحجم)	
٢١٣	حاصل الضرب الخارجى	مطل (أنظر تكاملات خطية)	
٤٢٠٣٥٠٢٣	حاصل الضرب الثلاثى	سطحي (أنظر تكاملات السطح)	
٢٢٩٠٢١٣	حاصل الضرب الداخلى	عائى	١٠٧
٢١٥	حاصل الضرب للصنوق	غير محدد	١٠٧
	حاصل ضرب	محدد	١٠٧
٢٢٨٠٢١٣	عائى	نظرية على (أنظر نظريات التكامل)	
	معدى (أنظر أيضاً حاصل ضرب معدى)	تكاملات خطية	١٤٢٠١٢١٠١٢٠١٠٧
٢١٣	الكتيات الممتدة	حساب له	١٤٢٠١١٥٠١١٢
	متجه (أنظر حاصل ضرب المتجهات)	فضل معين عنه كى محدود	١١٤٠١٠٧
٢٢	حاصل ضرب ، صنوق	غير معدى على المسار	٠١٤٧٠١٤٧٠١١٦٠١١٥٠١٠٨
٢٢٩٠٢١٣	داخلى		١٦٩٠١٦٨
	معدى ، (أنظر حاصل ضرب المعدى)	فى حدود دائرية	١٧٠٠٠١٠٧
٧	لحمه بمعدى	نظرية جبرين وحسابى	١٤٣
٢٠٢	لمحددات	تكاملات الفراغ (أنظر تكاملات الحجم)	
٢٢٥	للمصفوفات		
	متجه (أنظر حاصل ضرب المتجهات)	(ث)	
١٦٥	حالة مستطرفة . إنتقال الحرارة	قايث ٢٢٨٠٢١٢٠٧٧ (أنظر أيضاً القايث)	
٣	بجاء معدى	للال السطحي	٣٤٠٣٣
٣	بجاء متجه	للال السطوح	٤٩
	حالة استقرار (أنظر حالة استقرار)	للال السطوح ، تحرك	٤٩
	حجم	ثنائى التعماد	٦٢٠٦٠٠٥٨٠٤٩
٢٠٢	فى الإحداثيات العامة	ثنائية	١٠٥٠٩٧٠٩٤
٣٥٠٢٣	لتوازى المستطيلات		
٢٠٢٠١٧٨٠١٧٧	حجم ، لمتناقص	(ج)	
١٧٨٠١٧٧	فى إحداثيات متنى الأضلاع	جاكوبيان ٢٢٨٠٢١٢٠٧٧٠١٠٢	٢٠٤٠٢٠٢٠١٩٠٠١٨٩٠١٨٨٠١٧٣٠١٠٢
١٦٤٠١٦٣	حرارة	جبرين ، مطابقة أولى ، أو نظرية	٢٥٣٠٥٢٢٠٢٢١٠٢٠٥
١٦٣	لوعية	نظرية فى الفراغ (أنظر نظرية التبعاد)	١٥٦٠١٣٧
١٦٣٠١٦٢٠١٥١٠٢١٠٠٩٢٠٨٧٠٨٦	حركة المراتع	مطابقة جبرين الثانية أو نظرية التماثل	١٥٦٠١٣٧
١٦٣٠١٦١	غير قابل للتضاغط	جسم صلب ، حركة	٧٧
	حركة ، المائع (أنظر حركة المائع)	سرعة له	٤٤٠٣٥
١١٢٠١١٠	الشواكب	جوديسيات	٢٦٢٠٢٤٥٠٢٤٤٠٢١٨٠٢١٧
٦٨	حركة ، مطلقية	جيوب تمام ، اتجاه	٦٨
٢١٨	حساب التفاضل والتكامل لمتغيرات	قانون له ، لمستوى للثقلات	٢٧
١٢١	حفظ الطاقة	قانون له ، للثقلات كروية	٤٤
	(خ)		
١٦٠١١	خط معادلة		

خط بالوعة	١٧	(س)
صيغة معادلة متعائلة لـ	١١	سرعة
مصفو	١٧	زاوى
معادلات باراميتريّة	١٦	سرعة على طول منحى فراغ
		بالنسبة إلى مشاهد ثابت ومتحرك
(د)		عطى
دالة نقطة ، عدوى ومعجى	٣	زاوية
دلتا ، كرونكر ١٧١٧٢٥٠٢٢٥٠١٣٨ (أنظر أيضاً رموز		جزئى
كرونيكر)		للمسود
دوران	١٧٠٠١٠٧	للموالج
دوران ، أنظر الثبات		مساحى
لقبحاود	٩٩٠٩٨٠٧٦	سرعة نسبية
لقى	٧٧	سريان
دورة لكونك	١٣٠	سطح قابل للتوجه
دورى	١٧٢	سطوح
ديناميكا ٩ (أنظر أيضاً ميكانيكا)		إحداثى
في قانون نيوتن (أنظر قانون نيوتن)		زاوية بين
في معادلات جرانج	٢٥٥٠٢١٣	على طول قوس
ديناميكا الطيران	١٠٧	قابل للتوجه
		له جانبيان
(ر)		واحد جزئى
رمان - كريستوفل لكبة ممتدة	٢٦٤٠٢٥٨	
رتبة المصفوفة	٢١٣	
لكبة ممتدة	٢١١	شريحة مولاس
رتبة تقاضيات المتجهات	٨٩٠٤٨	فعل
عادى	٤٧٠٤٦	كتكامل عطى
جزئى	٤٨٠٤٧	
رسم	٢٠٥	
رمز حسر	٢١١	صيغة التربيعية الأساسية
رمز ديسية	٢١١	صيغة تربيعية أساسية
حسر	٢١١	صيغة سيرت فرلث
رمز علوى	٢١٠	صيغة عامل التكمال لـ ديل
رموز التبدل والكميات الممتدة	٢٦٢٠٢١٩٠٢١٨	صيغة متريّة
رموز كريستوفيل	٢٦٢٠٢٤٣٠٢٤٠٠٢١٧	صيغة متعائلة ، لمعادلة خط
قوانين التصويلات لـ		
(ز)		(ص)
زاوية مجمعة	١٦٢٠١٦٠	ضرب الكميات المتجهة
		أعطف قانون التبدل لـ

٦٨	عجلة نسبية	٣٢٠٧٣	ضرب شكل المجدد لـ
٢١٢٠٤٤١	علاوى	٣٢٠٣١٠٢٧	قانون التوزيع لـ
	حاصل ضرب ٢٢٩ (أنظر أيضاً حاصل الضرب العندى)	٢٢٩٠٢١٢	ضرب داخل
	حاصل ضرب ثلاثى (أنظر ضربيات ثلاثية)	٣٠٠٢٣٢٧٢	ضرب عددى
٤٦	متغير	٢٤٠٢٢	قانون التبديل للضرب العندى
٣	دالة الوضع	٢٤٠٢٢	قانون التوزيع للضرب العندى
٣	دالة نقطة	١٠٥	ضوء بسرعة
٢١٢٠١٦٠٣	مجال		ضربيات (أنظر حاصل)
١١٨٠١١٧٠١٠٨٠١٠٦٠٩٤	وضع		(ط)
٦٥٠٦٤	عزوم		طاقة
٦٤٠٣٥٠٣٤	عزم القوة	١٢١	الوضع
٧٣٠٦٦٠٦٤	عزم كمية التحرك	١٢١	طاقة
٢١٥	عكس مصفوفة	١٢١	خلف الطاقة
٦٥٠٩٢٠٦١٠٥٨٠٤٩	عمودى . أساسى	٢٥٤٠١٢١	طاقة الحركة
٦٢٠٦١٠٥٨٠٤٩	ثنائى	٢٥٤٠١٢١	طاقة الحركة
٧٩٠٧٣٠٦٤٠٦٣	عمودى - على سطح	١٢١	طاقة الوضع
١٠٨٠٦٣	موجب أو متجه الخارج	٢١٢	طرح ، لكبة معدة
	عامل مؤثر (دليل) ٧٥ (أنظر أيضاً ذلك)	٢	لمجهيات
	لابلاسين (أنظر عامل لابلايس)	٢٤٤	طرق نهاية
٦٧٠٦٦	مشتقة زمنية في قسطن المتحركة والثابتة	٢٣٨٠٢١٧٠٢١٦	طول المنحنى
١٠٨٠٦٣	عمود مرسوم للخارج	١٩٠٠١٧٧٠٧٣٠٤٨	طول المنحنى
١٠٨	عمود موجب	٧٣	على السطح
٢١٢	عناصر ، المصفوفة	١٩٠٠٧٣	في إحداثيات منحنى الأصلاص
٢٣٧٠٢٣٤٠٢١٥	عنصر الخط	١٧٧	في تمام إحداثيات منحنى الأصلاص
٢٣٧٠٢٣٤٠٢١٥	عنصر ، خط		(ع)
٢٠٢٠١٧٨٠١٧٧	نسيم		عامل عددى
	(خ)	٢٥٠٠١٠٥٠٨٣٠٧٦	عامل لابلايس ()
	غير متوافق . على نقطة الأصل	٢٥١٠١٩٧٠١٩٦	في الإحداثيات الاسطوانية
١١	على مسار التكمال	١٩٨٠١٩٧	في الإحداثيات الاسطوانية مكافئة للقطع
١٤٧٠١٤٧٠١١٦٠١١٥٠١٠٨		٢٦٧	
١٦٩٠١٦٧		٢٥١٠١٩٧	في الإحداثيات الكروية
١١٢	غير مركزى	١٩٤٠١٩٢٠١٧٨	في الإحداثيات منحنى الأصلاص
٢١٠١٣	غير محتمل ، عطفاً	١٠٥	لثبات
		٢٥٠٠٢١٩	لصيغة الكمية المنقطة
	(ف)	٠٦٤٠٥٥	عجلة الجذب المركزى (العجلة الحلقية للمركبة)
		٦٨	
٢١٥	فرانكات (أليليرميات)	٦٨	عجلة كوريلار
٢١٦	ويمانيين	١١٥	عكس اتجاه مغناطيس الساعة

١٣٠	لقيفة	٢١٧٠٢١٦	فراغ ديمان
٢١٤	نظر أساسى	٢٤٥٠٢٤٤٠٢١٧	فى جبر ديسيات
٢١٤	نظر أساسى	٢١٥	فرق ، المصفوفات
٢١٤	نظر المصفوفة المربعة	٢	لكيات المنج
١١٢	نظم زائده	٢١٣	لكيات الممتدة
١١٢	نظم مخروطى	١٨٩٠١٧٧٠٤٥٠٤١٠٤٠٠٢٣	نظائرم المنجيات العكسية
١٤٥	نظم مستعرض		
٢١٤٠٨٢	نظم ناقص	(ق)	
١١٢ ١١١	فى حركة الكواكب		أنظر التتابع (ديف)
١٤٤	فى مساحة	٨٧٠٨٣٠٧٥	التتابع
١٧٩٠١١٢	نظم مكافئ	٢٥١٠٢٥٠٠١٩٩	فى الإحداثيات الاسطوانية
٦٨	قوى حقيقية	٢٠٤	الإحداثيات الاسطوانية لنظم مكافئ
٦٨	قوى ، ذاتية	٢٥١٠٢٥٠٠٢٠٤	فى الإحداثيات الكروية
٦٨	حقيق	١٠٥	فى التيات
١٤١	محصلة	١٩٢٠١٧٨	فى الإحداثيات معنى الاصلاح
٦٨	قوى ذاتية	١٥٤٠١٥٣٠٨٧٠٨٦	كمى فيزيائى
٢٦١	قيم فردية	٢٥١٠٢٥٠٠٢١٩	لكية ممتدة
١١٠٠٧٢	قوة ، مركزية	٢٦٢٠٩٠٠٨٩٠٧٦	للاكتشاف
١١١	العام للجاذبية	٨٣٠٧٦	للاختصار
١١٠	دالة		نظرية (أنظر نظرية للتتابع)
٢٥٥٠٢٥٣	على جسم	٢٣٠٢٢٠٦٠٢	قانون التبدل
٦٤٠٢٥٠٣٤	عزم لـ	٢٣٠٦٠٢	قانون التوافق
٦٨	كوريلز	٢	قانون التوزيع
٢٤٠٢	قوانين المنجيات الجبرية	٣١٠٣٠٠٢٢	خاص للفرع الاتجاهى
١	قيمة ، متجه لـ	٢٤٠٢٢	خاص للفرع المبدى
١١٠٠٧٢	قوة مركزية	٩٥	لتوزيع التناهى
		٢١٥	المصفوفات
		٣٤	قانون الجيوب لمسعى المثلثات
		٤٠٠٣٩	مثلث كروى
١٦٢	كثافة	٢٢٥٠٢٢٣٠٩٩	قانون السلسلة
١٦٢	تيار	٤	قانون المثلث لجميع المنجيات
١٦٢	صفحة	٢٣١٠٢١٤	قانون خارج القسمة
٢٥٣٠٢٢١	كية ممتدة	١٧٤	قانون جاوسى
١٦٢	كثافة التيار	١٣٠٠١١٢٠١١١	قانون كيلر
١٥٦	كثافة للشحنة	٤٠٢	قانون متوازى الاصلاح لجميع المنجيات
٢٢٢	كرة فوفية	٦٨٠٦٥٠٤٩	قانون نيوتن
٢٢٦٠٢٢٥٠٢١٧	كروكودلنا	٢٥٣	فى صيغة كية ممتدة
٢١٦	كيات ممتدة لمسامية	١١١	الجاذبية العامة

(د)

	(ك)	٢١٦	كيات متحدة عكسية
٢٥٥	لبر انجين	٢٦١	كيات متحدة كرتيزية
٥٨	لولب دالرى	٢٦١٠٢٣٩٠٢٣٨٠٢١٩	كيات متحدة متر الفقة (مشاركة)
١٠٧	متجه ثابت اختياري	١١٢٠١١٥	كواكب وحركة
٣	متجهات في مستوى واحد	٢١٦	كيات متحدة مرافقة أو معاكسة
٣٧	شرط ضروري لـ	٢٢١	كيات متحدة مطلقة ونسبية
١٠٠٩	فير	٢٥٨	كيات متحدة لانحناء متحدة الاختلاف
	متجه مضاد الاختلاف (أنظر كيات مضادة الاختلاف لمتجه)	٢٥١	كيات متحدة مضادة الاختلاف . لرتبه الأول
	متجه متحد الاختلاف و (أنظر مركبات متحدة الاختلاف لمتجه)	٢١٥٠٢٥٥	كيات متحدة مضادة الاختلاف . لرتبه الأول
		٢١١	لرتبه ثانية وأعلى
١٧٩٠١٠٠٩	متجهات الأساس	٤٩	كيات التصحرك
١٧٧	الترجمة	٧٣٠٩٥٠٩٤	زاوية
١١٠١٠	متجهات متوازية	٢١١٠٢٥٥	كيات متحدة مضادة الاختلاف . لرتبه أول
١٠٠٨	فير	٢١٢	لرتبه ثانية وأعلى
٢٠٠١٣	متجهات متحدة خطية	٢٣٧٠٢٣٤٠٢١٦٠٢١٥	كيات متحدة مترية
٤٥٠٢٣	متوازي الأضلاع ، مساحة	٢١٢٠٢١١	كيات متحدة مختلطة
٢	متجه متزن	٢٢١	كيات متحدة مطلقة
١٠٨٠٢٤	متجه ، مساحة	٢١٦	أساس
	العامل المؤثر (أنظر دليل)	٢١٣٠٢١٧	التفاضل المتغاير
١٠٥	الوضع	٢٥٨	الانحناء
	حاصل الضرب الثلاثي (أنظر الضرب للتفاضل)	٢٦١٠٢٣٩٠٢٣٨٠٢١٩	تفاضل
	حاصل الضرب (أنظر حاصل الضرب المتجهي)	٢٦١	كارتيزيان
٣	دالة النقطة	٢٥٣٠٢٢١	كتلة
٣	دالة الوضع	٢١١	لرتبة
٢١٣	صف	٢١١	لرتبة
٢١٣	شهود		متحدة الاختلاف (أنظر للمركبات المتحدة الاختلاف)
١٣٤١	قيمة الكمية	٢١٥	مترى
٢	متزن	٢١٢	متفاضل
٢	مجال	٢١٢	مجال
٢١٢٠١٧٠١٦٠٢٥١	مشتقة زمنية	٢١٢٠٢١١	مختلط
١٢٤٢	معادلات	٢١٦	مراقب
٣	نصف قطر		مضاد الاختلاف (أنظر للمركبات المضادة الاختلاف)
٢	وضع	٢١٦	معاكسة
٤٧٠٤٦	منعرج	٢٦٤٠٢٥٣٠٢٥٢٠٢٢١	نسبي
٤٠١	متجهات	٢٦٤٠٢٥٣٠٢٥٢٠٢٢١	كيات متحدة نسبية
١	تمثيليات وتحليليات	٢٣٧٠٢٣٩٠٢١٦	كيات متحدة مترية مرافقة
٤٠١	تمثيل بياني	٢٣١٠٢٢٥٠٢١٣	كيات متحدة ، أساسى المتعامل مع
٤٧٠٤٦	تفاضل		كياتيكيا ٤٩ (أنظر أيضا ديناميكا وميكانيكا)

٢٣٨٠٢١٧٠٢٦	تمثيلات زاوية بين
٢٣	عكسية
٢٣	غير متوازية (أنظر للتجهات المتوازية)
١٠٠٩٠٠٣	في مستوى واحد (أنظر متجهات في مستوى واحد)
١٧٧٠١٠٠٩	قاعدة
٤٤٢	التجميع
٢٤١	الهندسة
١٠٠٨٠٣	مركبات
٢١١٠٢٠١٠٢٠٠٠١١٧	مركبات متصلة الاختلاف
١٣٠٧٠٦٠٤٤٢	المحصلة
١	لنقطة نهاية
١	لنقطة الأصل
٢٠٠٠١٧٧	نقطة بداية ١ مركبات مضادة الاختلاف
٢١١٠٢٠١	وحدة
٧	متجه صفري
٧٠٢	عديدات وصفريات له
٢٣٦٠٢٣٤٠٢١٦	محدد ، المتاصل
٧٦٠٧٥	الاختلاف بين منه
٣١٠٢٣	لتصغير عن الضرب المتجهي
٥٧	تفاضل
٢٧٠٣٦٠٢٣	جاكوبيان (أنظر جاكوبيان)
٢٦٠٠٢١٥	التصغير عن الضرب للمدى الثلاثي
١٣٠٧٠٦٠٤٤٢	المصفوفة
١٢٠٠١١٧٠١١٦٠١٢١٠٩٤	محصلة المتجهات
١٢١٠١٢٠	مجال تحقيقي
١١٨٠١١٧	حركة جسم في
١١٧٠٩٥٠٩٤	شرط ضروري له
١١٧٠٩٥٠٩٤	مجال لادوران
١١٧٠٩٥٠٩٤	مجال (أنظر المجال الممدى ومجال متجه)
١١٧٠٩٥٠٩٤	لادوران
١٦٣٠١٥٥٠٩٥٠٨٧	بالوعة ١٧ ، (أنظر أيضاً بالوعة)
٩٧	حلزوني
٢١٢	درواة
٢١٢	كيات نقطة
١٦٣٠١٥٥٠٩٤٠٨٧	محافظ (أنظر مجال محافظ)
٢١٤	مصدر ١٧ ، (أنظر أيضاً مصدر)
٢١٤	مجال لولبي
٢٣٨٠٢١٧٠٢٦	مجال بالوعة ١٧ (أنظر أيضاً بالوعة)
٢٣	مجال عملي مستقر
٩٣	مجال دواي
١٠٠٩٠٠٣	مركبات للمتجهات
٢	عمودية
٤٢٠٠٠١٩٩٠١٧٧	مركبات ، مضادة الاختلاف
٢١١٠٢١٥	طبيعي (أنظر مركبات طبيعية)
٢١١٠٢١٠٢٠٠٠	لكية نقطة
٢١١٠٢٠١٠٢٠٠٠١٩٩٠١٧٧٠٣	لمتجه
٩٤	لوحة ثنائية
١٧٧	متصلة الاختلاف
٤٤	مركز الدائرة المحيطة
٢٥	مركز ثقل
٢١١٠٢٠١٠٢٠٠٠١٧٧	مركبات متصلة الاختلاف
٧١٢٠٢١١	لكية نقطة
٢١١٠٢٠١٠٢٠٠٠١٧٧	لمتجه
٢٦٢٠٢٥٥٠٢٥٠١٠٢٥٠٠٢١٧	مركبات فيزيائية
٣	مركبة المتجهات العمودية
٢١٢	مركبة صفرية لكية نقطة
٢١١	مركبة ، لكية نقطة
٢١٥	مصفوفات متوافقة
٢١٣	مصفوفة عمود أو متجه عمود
٢١٣٠٩٤	مصفوفة (أنظر أيضاً المصفوفات)
٢١٥	المجبر
٢٦١٠٢١٥	تبدل له
٢١٣	صف
٢١٣	نظر أساسي له
٢١٣	عمود
٢٦١٠٢٦٠٠٢١٤	عكس له
٢١٣	متناسق له
٢٦٠٠٢١٤	محدد له
٢١٣	مربع
٢١٤	مفرد
٢١٣٠١٨٥٠٢١٤٠٢١٣	مصفوفات (الأنظر أيضاً)
٢١٤	بالمتصل مع
٢١٤	جميع له

١٧٤٤١٦٤٤٨٤	معادلة لابلاس	٢١٥	مصفوفات متوافقة
١٩٨٤١٩٧	في الإحداثيات الاسطوانية مكافئة القطع	٢١٥	مسار آلة
٢٤٤	معادلات ليار	٢١٣	مصفوفة صف ، أو متجه صف
٢٠٤٤١٦٤٤١٦٣	معادلة حرارة		مصدر مجال ١٧ (أنظر أيضاً مصدر)
١٩٨	في الإحداثيات الاسطوانية	١٥٥٤٨٧٤١٧	مصدر
٢٠٤	في الإحداثيات الكروية	٢١٥	مصفوفة فردية
٢٥٥٤٢٤٤	معادلات لاجرانج	١٤٧٤١٤٤٤١٤٤١	منطقة ، متعددة للتوصيل
١٣٣٤٧٠	معادلات تفاضلية	١٤٧٤١٤٦٤٦٤٦	بسيطة للتوصيل
١٥	مسافة بين نقطتين	٢٢٠	مشتقة ، مطقة
٢١٥	مسافة المصفوفات	٨٢٤٨٠٤٧٥	الانجاس
١	للمتجهات	٢٦٢٤٢٥٢٤٢٢٠	ذاتية
٢٦٢٤٢٤٩٤٦٤٦٤٦١٨	منطقة متحدة الاختلاف	٢٦٢٤٢٤٨٤٢٤٦٤٢١٨	متحدة الاختلاف
٢٦٦٤٢٣٥٤٢١٦	معلم	٥٦٤٤٦	مشتقات المتجه
٧٢	مكعب ، القوي	٥٨٤٥٦٤٤٨٤٤٧	جزئي
١٠٧	ميكانيكا الموائع	٥٥٤٥٠٤٤٧٤٤٦	عادي
	ميكانيكا ٤٧ ، ٧٣ ، (أنظر أيضاً ديناميكا)	٢٦٢٤٢٥٢ ٢١٩	مشتقة ذاتية
١٠٧	مواقع	٢٢٢	مستوى زائد
	منحنى وفراغ (أنظر منحنى فراغ)	٦٢٤٤٩	مستوى الثام (مستوى للماس)
١٧٢	منحنى ذو حروطين	٢١٢	مصفوفة مربعة
٢٠٤	ميكانيكا الكم	٦٢٤٤٩	مستوى عمودي
١٣٦٤١٠٧	منحنى بسيط مغلق	٦٤٤٦٢٤٦٠٤٥٨٤٤٩	عمودي ، أساس
١٤٢	مساحة محددة بواسطة	٢٩	مستوى ، مسافة من نقطة الأصل إلى
٩٤	معادلة الانتشار	٦٢٤٤٩	توحيد
٤٤	ملحق الارتفاعات		في متجهات (أنظر متجهات في مستوى واحد)
٣	موضع المتجه	٣٨	متجه عمودي على
٨٢	موجبات صوتية	٦٦٤٦٤٦٣	لماس
٦٤٤٦٢٤٦٠٤٥٨٤٥١٤٩٤٤٨	عاس لمنحنى فراغ	٢٨٤٢٩٤٢٠	معادلة
٤٦	منحنيات فراغ	٦٤٤٤٩	عمود
١٤٥٤٦٠٤٥٨٤٤٩	إختباء له	٦٢٤٤٩	لماس (الثام)
٦٢٤٦٠٤٥٨٤٤٩	ثنائي التصادم	٢٤٤٢٣	مثلث ، مساحة
١٩٠٤١٧٧٤٧٣٤٤٨	طول قوس	٧٩٤٦٤٦٣	مستوى للماس
٧٣٤٦٤٥١٤٥٠٤٤٦	على طول حجلة	١٤٦٤١٤٥٤١٤٤١	منطقة بسيطة للتوصيل
٦٤٤٦٢٤٦٠٤٥٨٤٤٩	لعمود الاساسي	١٦٣	معامل التوصيل الحراري
٦٤٤٥٩٤٥٨٤٤٩	لنصف قطر الإختباء	٢٠٤	معادلة ستشرودينج
٥٨٤٤٩	لنصف قطر الالتواء	١٧٤	معادلة يوش
٦٤٤٦٢٤٦٠٤٥٨٤٥١٤٤٩٤٤٨	للماس	١٠٥٤٩٢	معادلات ماكسويل
		٢٥٦	في صيغة الكمية المنتجة
		١٩٠	معادلات متربة

(٥)	نظريه إليات	١٦٧٠١٦٤
لبسلا (أنظر دليل)	بصلة كية ممتدة	٢١٣
نسبية ونظريه لـ	كحالة خاصة لنظريه جرين	١٤١
نظام عين	نظريه هاميلتون - كينلى	٢٦١
نصف قطر ، الانحناء	نظم القصور الذاتي	٦٨
للاتواء	نظم إحداثيات متخلى الاصلاخ المتعامدة	٢٣٩٠١٧٦٠٦٣
نصف قطر المنتج	خاص	١٨٢٠١٧٨
نظام الإحداثيات المتعامد	نظم إحداثى يمينية	٣٠٢
نظام ثلاثى السطوح	وضعت	٤٩
نظريه التباعد	نظم متحركة وثابتة ، شاهدة فى	٦٨٠٦٦
فى صيغة كية ممتدة	نظم دوران الإحداثى	٦٧٠٦٦
فى صيغة متعامدة	نقطة بداية المنهج	١
كإليات	نقطة فردية	١٨٢
كخيلز يالى	نقطة نهاية أو النهاية	١٥٠٦٠٢٠١
معر عنها فى كلمات	نظام الإحداثيات الحلقية	١٨٢
معر عنها فى كلمات		
نظريه جرين كحالة خاصة		
نظريه بيجورون		
نظريه جاوس		
نظريه جاوس للتباعد (أنظر نظريه التباعد)		
نظريه جرين فى المستوى		
كحالة خاصة لنظريه التباعد		
كحالة خاصة لنظريه متوكس		
للمناطق البسيطة الاتصال		
للمناطق المتعددة ، الاتصال		
نظريات التكميل		
(أنظر أيضاً نظريه متوكس ونظريه التباعد)		
نظريه متوكس		

(٥)

متنسى ، تفاضل (أنظر التفاضل الهندسى)

(٥)

٩٤	وحدة الثنائى
٩٤	وحدة ثنائية
١٤٠٢	وحدة متجهات
٣٠٢	التمودية
٢١٣	وحدة مصفوفة
٢٢١	وزن النكية الممتدة
١١٨٠١١٧٠١٠٨٠١٠٦٤٩٤	وضع ، عددى
١٠٥	متجهه

VECTOR ANALYSIS

(Schaum)

تعريف، سلسلة

* لماذا تشتري كتاب شوم ؟

كل كتاب يحتوى على النظرية الأساسية والتعريفات ومئات من المسائل المحولة بعناية، وكذلك مسائل غير محلولة لمساعدة الطالب على التفوق.

الزراعة والعلوم الحيوية

- الوراث

الاقتصاد وإدارة الأعمال

- الإحصاء والاقتصاد القياسي

- الاقتصاد الدولي

- النظرية الاقتصادية الكلية

- نظرية اقتصاديات الوحدة

- أصول المحاسبة (1)

- أصول المحاسبة (2)

التربية وعلم النفس

- مقدمة فى علم النفس

- سيكولوجية التعلم

- النوال المركبة

- الرياضيات الأساسية للحاسب

- الرياضيات المتقدمة

- المعادلات التفاضلية

- الميكانيكا العامة

- نظرية الفئة

- مبادئ حساب التفاضل والتكامل

- البرمجة بلغة الباسكال

- البرمجة بلغة البيسك (دربي)

- البرمجة بلغة البيسك (إنجليزى)

- البرمجة بالפורتران

- البرمجة بلغة الكويل

- البرمجة بلغة C - الجزء الأول

- البرمجة بلغة C - الجزء الثانى

- أساسيات الفورتران

- أساسيات الكويل

الكيمياء والفيزياء

- الكيمياء العضوية

- الكيمياء العامة

- فيزياء السنة الأولى الجامعية

- مبادئ الفيزياء

الهندسة

- تكنولوجيا الالكترونيات

- الدوائر الكهربائية

- الماكينات الكهربائية

- نظم القوى الكهربائية

- البناط الالكترونية وبناطها

- أساسيات الهندسة الكهربائية

- الديناميكا الحرارية

- مقاومة المواد

- ميكانيكا الموائع والهيدروليكا

- اعزازات ميكانيكية

- الرياضيات والحاسبات

- الاحتمالات

- الإحصاء

- بحوث العمليات

- التحليل العددي

- تحليل التجهيزات

- الجبر الخطي

- التفاضل والتكامل المتقدم

- حساب التفاضل والتكامل

INTERNATIONAL PUBLISHING & DISTRIBUTION HOUSE

P.O. Box 5599 Heliopolis West, Cairo / Egypt

Tel. / Fax: 2990970

